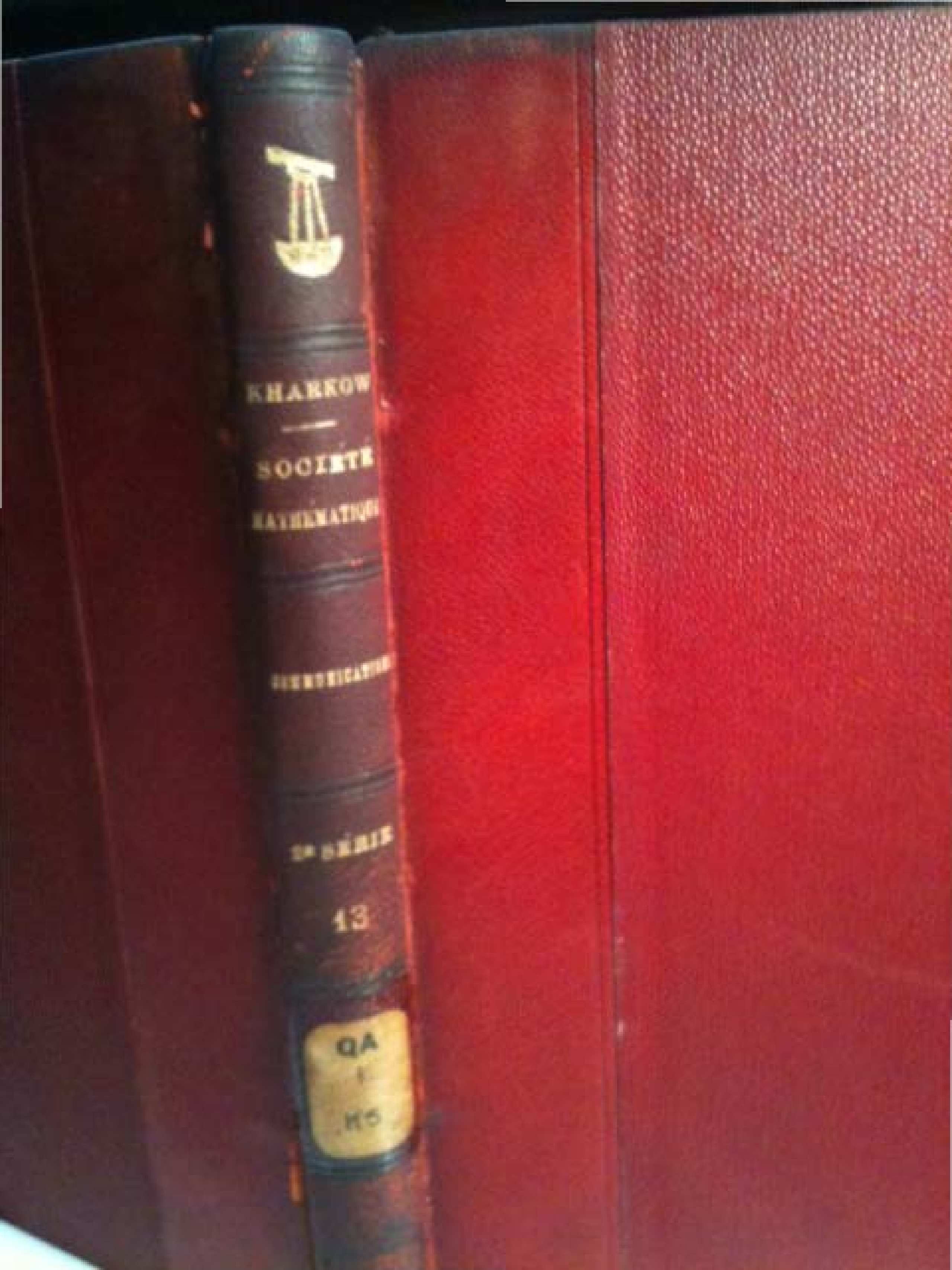
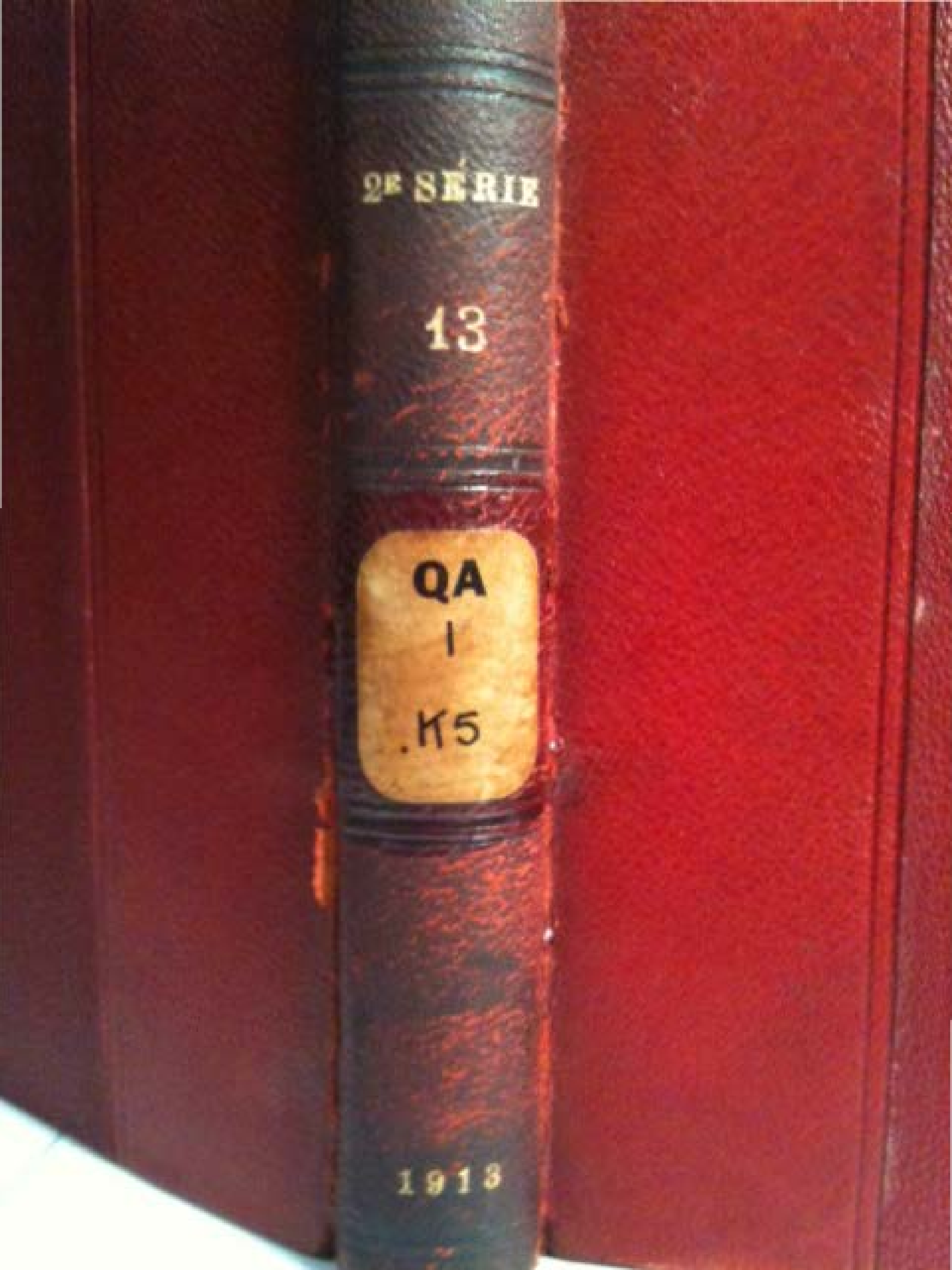

KHARKOW
SOCIETE
SÉRIE
13
QA
1
.K5


2e SÉRIE
13
QA
1
.K5
1913

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ XIII.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1913.

СОДЕРЖАНІЕ

XIII-го тома.

TABLE DES MATIÈRES

du tome XIII.

СОСТАВЪ

Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му января 1913 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: проф. Д. М. Синцовъ.
2. Товарищи предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ.
3. Секретарь: проф. А. П. Пшеборскій.

B. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, засл. проф. Московскаго унив.
2. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, засл. проф. СПБ. унив.
3. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, засл. проф. унив. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, засл. проф. Московскаго унив.
6. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
7. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, засл. проф. СПБ. элек.-техн. инст.
9. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
10. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
11. Appel Paul, проф. Парижскаго унив., академикъ.
12. Cantor Georg, проф. университета, Halle.
13. Darboux Gaston, академикъ, Парижъ.
14. Dedekind Richard, проф. Политехн., Карлсруэ.
15. Dini Ulisse, профессоръ университета, Пиза.
16. Hilbert David, проф. университета, Göttingen.
17. Jordan Camille, членъ Института, Парижъ.
18. Klein Felix, проф. университета, Göttingen.
19. Mittag-Leffler, Gösta, проф. университета, Stockholm.
20. Painlevé Paul, членъ Института, Парижъ.
21. Picard Emile, проф. Парижскаго Университета, академикъ.
22. Volterra Vito, профессоръ Университета, Римъ.
23. Zeuthen N. G., профессоръ Университета, Копенгагенъ.

С. Дѣйствительные члены.

1. Аксюкъ Екатерина Павловна, препод-ца 2-й Харьк. женск. гимн.
2. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго техн. инст.
3. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
4. Бернштейнъ Сергѣй Натановичъ, прив.-доц. Харьк. универс.
5. Бураковъ Григорій Ѳедотовичъ, ад.-проф. Харьк. техн. инст.
6. Бутовъ Василій Васильевичъ, преп. гимн. 2-ой гр. препод.
7. Бѣлинскій Александръ Генриховичъ, инж.-техн., препод. частн. гимн.
8. Бѣляевъ Николай Павловичъ, директоръ гимн. Тов. Препод.
9. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Староб. гимн.
10. Вольскій Степанъ Петровичъ, преп. Харьк. 3-й гимн.
11. Гохманъ Владиміръ Соломоновичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
12. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.
13. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
14. Гриненко Николай Петровичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
15. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумского реальн. учил.
16. Грузинцевъ Григорій Алексѣевичъ, прив.-доцентъ Харьк. унив.
17. Даватцъ Владиміръ Христіановичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
18. Денченко Сергѣй Георгіевичъ, содерж. частн. учебн. завед. 1-го разр.
19. Дробязко Михаилъ Павловичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
20. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
21. Епифановъ Федоръ Филипповичъ, лаборантъ Харьк. университета.
22. Ерохинъ Петръ Михайловичъ, стипендіатъ Харьк. университета.
23. Запорожецъ Леонидъ Григорьевичъ, преп. Харьк. коммерч. учил.
24. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
25. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. техн. института.
26. Ивицкій Е. П., преп. частной гимназіи Давыденко.
27. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф., СПБ.
28. Кирьяковъ Иванъ Аѳанасьевичъ, инсп. 3-й Харьк. гимн.
29. Киселевъ Андрей Петровичъ. преп. Воронеж. кадет. корпуса.
30. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
31. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьк. 4-й гимн.
33. Кудревичъ Борисъ Ивановичъ, ассист. Харьк. астр. обсерв.
34. Кутневичъ Дмитрій Андреевичъ, директ. 2-го Харьк. реальн. учил.
35. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
36. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
37. Левицкій Григорій Васильевичъ, попеч. Варшавск. учебн. окр.
38. Маевскій Андрей Васильевичъ, б. дир. Курск. реальн. учил.
39. Малышевъ Николай Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.

40. Мартосъ Б. Н.
41. Марчевская Елена Николаевна, преп. высш. женск. курс.
42. Марчевскій Михаилъ Николаевичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
43. Марцелли Александръ Ивановичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
44. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
45. Мощенко Василій Николаевичъ, преп. Харьк. коммер. учил.
46. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьк. техн. инст.
47. Назаревскій Яковъ Михайловичъ, преп. частной гимн.
48. Нечаевъ Александръ Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
49. Педаевъ Дмитрій Кондратьевичъ, ассистентъ метеор. станціи.
50. Петренко Георгій Ивановичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
51. Подпрятовъ Николай Михайловичъ.
52. Подтягинъ Николай Евгеньевичъ, стипендіатъ Харьк. университета.
53. Пономаревъ Ростиславъ Дмитріевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
54. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
55. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьк. универс.
56. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. полит. инст.
57. Раевскій Сергѣй Александровичъ, б. попеч. Харьк. учебн. округа.
58. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, б. стипендіатъ Харьк. унив.
59. Речинскій Чеславъ Владиславовичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
60. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, б. дир. Урюп. реальн. учил.
61. Русьянъ Цезарь Карловичъ, проф. Харьк. унив.
62. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Харьк. унив.
63. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, дир. Усть-Медвѣдицкаго р. учил.
64. Семилѣтовъ Сергѣй Матвѣевичъ, лабор. и ассист. метеор. обсерв.
65. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
66. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьк. универ.
67. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
68. Сонцевъ Андрей Александровичъ, преп. 2-го Харьк. реальн. учил.
69. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
70. Студенцовъ Веніаминъ Александровичъ, дир. 1-го Харьк. р. учил.
71. Тимоѳеевъ Гавріилъ Ефимовичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
72. Фесенко Валерій Михайловичъ, преп. 1-й женск. гимн.
73. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. унив.
74. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюпин. реальн. учил.
75. Чернушенко Иванъ Семеновичъ, преподаватель гимназіи Домбровской.
76. Шепелевъ Павелъ Васильевичъ, преп. Харьков. технол. инст.
77. Шимковъ Андрей Петровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
78. Шиховъ Василій Васильевичъ, окружн. инсп. Харьк. учебн. округа.
79. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьк. гимн.
80. Эренфестъ Павелъ Сигизмундовичъ, проф. Унив., Лейденъ.

D. Члены корреспонденты:

a) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, засл. проф. Казанскаго унив.
2. Егоровъ Дмитрій Θедоровичъ, проф. Московскаго унив.
3. Колосовъ Гурій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго унив.
4. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
5. Крыловъ Алексѣй Николаевичъ, проф. Морской Академіи.
6. Лахтинъ Леонидъ Кузьмичъ, проф. Московскаго унив.
7. Мещерскій Иванъ Всеволодовичъ, проф. СПБ. политехн. инст.
8. Млодзѣевскій Болеславъ Корнеліевичъ, засл. проф. Моск. унив.
9. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
10. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, засл. проф. Варшавскаго унив.
11. Тороповъ Константинъ Александровичъ, дир. Оренбург. реальн. уч.
12. Чаплыгинъ Сергѣй Алексѣевичъ, дир. Моск. высш. женск. курсовъ.

b) иностранные.

1. Borel Emile,проф. унив., Парижъ.
2. Cosserat Eugène, проф. Тулузскаго унив.
3. Enriques Federico, проф., Болонскаго университета.
4. Favaro Antonio, проф., Падуя.
5. Fehr Henri, проф. редакторъ «Enseignement mathématique», Женева.
6. Forsyth Alfred Russel, проф., Кэмбриджъ.
7. Fredholm Ivar, проф., Стокгольмъ.
8. Goursat, Edouard, проф., Парижъ.
9. Greenhill A. G., проф., Лондонъ.
10. Hadamard Joseph, проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
11. Holmgren Erik, проф., Упсала.
12. Hurwitz Adolf, проф. политехникума въ Цюрихѣ.
13. Kneser Adolf, проф. Бреславскаго унив.
14. Korn Arthur, проф. Берлинъ.
15. Laisant C. A., ред. «Interméd. des Math.», «Nouv. Annales de Math.» etc.
16. Levi-Civita Tullio, проф. унив. Падуя.
17. Lindelöf Ernst, проф. Гельсингфорсъ.
18. Loria Gino, проф. Генуя.
19. Maggi Gian Antonio, проф. Пиза.
20. Osgood W. F. проф., Кэмбриджъ (Масс.).
21. Runge Carl, проф., Гёттингенъ.
22. Schlesinger Ludwig, проф. унив., Гиссенъ.
23. Teixeira Gomes, проф. и дир. полит. инст., Опорто.
24. Zaremba S. проф. Краковскаго унив.

О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ данной степени.

С. Бернштейна.

ВВЕДЕНІЕ.

Вопросъ о приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ или другихъ простыхъ выраженій опредѣленнаго вида, равнозначный вопросу о разложеніи функцій въ соотвѣтствующіе ряды, является основнымъ въ теоріи функцій вещественной перемѣнной. Я не буду излагать здѣсь исторіи этого вопроса, поучительной во многихъ отношеніяхъ; напомню лишь важнѣйшіе ея моменты.

Теорія разложеній функцій въ ряды обязана своимъ возникновеніемъ задачамъ математической физики, которыя великіе геометры XVIII столѣтія пытались рѣшать при помощи безконечныхъ рядовъ. Разумѣется, въ изслѣдованіяхъ этого времени, когда даже разница между сходящимися и расходящимися рядами была не ясна, о точности въ современномъ смыслѣ этого слова не можетъ быть и рѣчи. Только въ первой половинѣ XIX столѣтія, Дирикле и Коши доказали сходимость нѣкоторыхъ разложеній для весьма обширнаго класса функцій и положили такимъ образомъ основу современной строго математической теоріи функцій вещественной перемѣнной.

Но прошло еще полъ-столѣтія, прежде чѣмъ Вейерштрассъ въ 1885 г. доказалъ, пользуясь однимъ интеграломъ изъ теоріи теплоты, что всякая непрерывная функція можетъ быть разложена въ равномѣрно сходящійся рядъ многочленовъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ пріемъ, хотя и довольно сложный, для построенія многочленовъ, сколь угодно мало отличающихся отъ данной произвольной функціи. Открытіе этой замѣчательной по своей общности теоремы опредѣлило дальнѣйшій ходъ развитія анализа; съ этого момента теорія функцій комплексной перемѣнной, достигшая въ тоже время своего величайшаго расцвѣта, постепенно отходитъ на задній планъ, выдвигая впередъ изученіе функцій вещественной перемѣнной.

Послѣ Вейерштрасса, многими математиками были предложены болѣе или менѣе простыя доказательства его теоремы [1]), дающія возможность, при всякомъ значеніи ε, найти для данной на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB непрерывной функціи $f(x)$ приближенные многочлены $P_n(x)$ достаточно высокой степени n, чтобъ уклоненіе $|f(x)-P_n(x)|$ оставалось не болѣе ε на данномъ отрѣзкѣ.

Сопоставленіе различныхъ методовъ естественно выдвинуло задачу: каково для данной функціи $f(x)$ наилучшее приближеніе, котораго можно достигнуть при помощи многочленовъ данной степени, или точнѣе говоря, каково наименьшее возможное значеніе $E_n[f(x)]$ уклоненія ε при данномъ n?.

Эта задача была поставлена П. Л. Чебышевымъ болѣе пятидесяти лѣтъ тому назадъ, т. е. задолго еще до открытія Вейерштрасса. Оригинальный алгебраическій методъ великаго русскаго математика привелъ его къ весьма замѣчательнымъ свойствамъ многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи $f(x)$, и въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ позволилъ ему дать полное рѣшеніе задачи. Однако въ общемъ случаѣ мы не находимъ у Чебышева никакихъ указаній относительно величины наименьшаго уклоненія $E_n[f(x)]$, и этимъ главнымъ образомъ объясняется, почему въ свое время изслѣдованія Чебышева не оказали вліянія на развитіе теоріи функцій.

Настоящее сочиненіе представляетъ собой попытку приближеннаго вычисленія наименьшаго уклоненія $E_n[f(x)]$ и изслѣдованія связи между закономъ убыванія $E_n[f(x)]$ и дифференціальными свойствами разсматриваемой функціи. Чтобъ можно было судить о томъ, насколько простой и глубокой оказывается эта связь, достаточно будетъ указать, напримѣръ, два предложенія [2]): для того, чтобъ функція вещественной

---

[1]) См. *Borel.* Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.

[2]) Эти предложенія и нѣсколько другихъ были мною указаны въ замѣткѣ, представленной Французской Академіи Наукъ 28-го февраля 1911 г. Изъ предшествующихъ этой замѣткѣ работъ въ томъ же направленіи слѣдуетъ указать важныя сочиненія Lebesgue и de la Vallée Poussin, на которыя въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ будутъ сдѣланы ссылки. Болѣе подробныя библіографическія указанія читатель найдетъ въ работѣ *D. Jackson.* «Uber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen». Göttingen. (Preisschrift und Inaugural-Dissertation). Авторъ этой интересной работы, появившейся въ іюлѣ 1911 г., получилъ самостоятельно нѣкоторые изъ результатовъ моей замѣтки, которую онъ цитируетъ на страницахъ 12-й и 15-й. Вмѣстѣ съ тѣмъ считаю нужнымъ замѣтить, что настоящая моя работа, за исключеніемъ трехъ «Добавленій» къ IV и V главѣ, представляетъ, съ незначительными редакціонными измѣненіями, переводъ мемуара подъ тѣмъ же заглавіемъ, удостоеннаго преміи Бельгійской Академіи, куда онъ былъ отправленъ мною въ іюнѣ 1911 года.

перемѣнной $f(x)$ была аналитической на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB, необходимо и достаточно, чтобъ наименьшее уклоненіе $E_n[f(x)]$ на отрѣзкѣ AB убывало съ возрастаніемъ n быстрѣе, чѣмъ члены нѣкоторой убывающей геометрической прогрессіи; для того, чтобъ функція $f(x)$ имѣла производныя всѣхъ порядковъ, необходимо и достаточно, чтобъ, при всякомъ p, $\lim\limits_{n=\infty} E_n[f(x)]\,.\,n^p = 0$. Вообще, чѣмъ проще дифференціальная природа функціи, тѣмъ быстрѣе убываетъ E_n, и наоборотъ.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе наименьшей возможной погрѣшности, при приближеніи функціи посредствомъ многочленовъ возрастающихъ степеней, даетъ совершенно общее основаніе для послѣдовательной классификаціи и изслѣдованія всѣхъ непрерывныхъ функцій вещественной перемѣнной.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

О нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ рядовъ многочленовъ.

Глава I.

Предварительныя теоремы о многочленахъ.

1. Многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля. Въ своихъ знаменитыхъ изслѣдованіяхъ о приближенныхъ многочленахъ Чебышевъ построилъ многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ; а именно, онъ доказалъ, что изъ всѣхъ многочленовъ вида

$$Ax^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n ,$$

гдѣ A данная величина, а остальные коэффиціенты произвольны, наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-h, +h)$ многочленъ

$$\frac{Ah^n}{2^{n-1}} \cdot T_n\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{Ah^n \cos n \arccos \frac{x}{h}}{2^{n-1}} = \frac{A}{2^n} \cdot \left[(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n\right]. \quad (1)$$

Для краткости мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть $c \, . \, T_n(x)$, гдѣ c постоянная величина, *тригонометрическими многочленами*, и выведемъ нѣкоторыя ихъ свойства, аналогичныя свойству, открытому Чебышевымъ.

2. Теорема. *Если многочленъ $P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$ обладаетъ свойствомъ, что $|P_n(x) \, . \sqrt{1-x^2}|$ достигаетъ въ промежуткѣ $-1, +1$ значенія M, то $|P_n(x)|$ не можетъ въ этомъ промежуткѣ оставаться менье $\frac{M}{n}$; эта послѣдняя величина не будетъ превзойдена лишь въ случаѣ, когда $P_n(x)$ тригонометрическій многочленъ.*

Чебышевъ допускалъ безъ доказательства существованіе многочленовъ данной степени, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Но современный анализъ требуетъ этого доказательства, такъ какъ немало есть задачъ о минимумѣ, напримѣръ, въ варіаціонномъ исчисленіи, которыя не имѣютъ рѣшеній. Въ виду этого намъ необходимо сдѣлать нѣсколько предварительныхъ замѣчаній, для того, чтобъ показать, что среди разсматриваемыхъ многочленовъ существуетъ, дѣйствительно, одинъ или нѣсколько такихъ многочленовъ, для которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ *достигаетъ* наименьшаго возможнаго значенія. Разсмотримъ; вообще, произведеніе $|P_n(x) . \varphi(x)|$, гдѣ $\varphi(x)$ какая нибудь непрерывная функція (голоморфная при всѣхъ значеніяхъ x даннаго промежутка, кромѣ тѣхъ, можетъ быть, гдѣ $\varphi(x)=0$). Максимумъ этого произведенія $m(p_0, p_1, \ldots p_{n-1})$ есть непрерывная однородная функція первой степени коэффиціентовъ $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, т. к., при умноженіи ихъ на одно и тоже число k, m будетъ умножено на то же число k. Значенія коэффиціентовъ, удовлетворяющія уравненію $m=M$, гдѣ M, данная величина, можно раздѣлить на n группъ: въ первой $|p_0| \geq |p_i|$, во второй $|p_1| \geq |p_i|$ и т. д. $(i=0, 1, \ldots, n-1)$.

Разсмотримъ, напримѣръ, значенія первой группы; въ данномъ случаѣ уравненіе $m=M$ можемъ написать такъ:

$$p_0 . m\left(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_0}\right) = M,$$

или, полагая

$$\frac{p_1}{p_0} = \lambda_1, \quad \frac{p_2}{p_0} = \lambda_2 \text{ и т. д.},$$

$$p_0 = \frac{M}{m(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})}.$$

Такимъ образомъ, p_0 есть конечная и непрерывная функція перемѣнныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, которыя по абсолютному значенію не превышаютъ единицу; поэтому максимумъ $|p_0(x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\ldots \lambda_{n-1}x)+p_n| = |P_n(x)|$ есть непрерывная функція $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, p_n$; при этомъ, очевидно, можно ограничиться разсмотрѣніемъ значеній $|p_n|$, не превышающихъ нѣкотораго числа H. Но непрерывная функція n перемѣнныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, p_n$, принимающихъ всевозможныя значенія нѣкоторой замкнутой области, достигаетъ своего минимума для опредѣленныхъ значеній перемѣнныхъ въ этой области. Аналогичнымъ образомъ можно доказать существованіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля, соотвѣтствующихъ каждой изъ n группъ коэффиціентовъ. Выбирая ту изъ группъ, которая даетъ наименьшее значеніе для максимума $|P_n(x)|$, мы убѣждаемся наконецъ, что среди многочленовъ, для которыхъ $m = M$, дѣйствительно есть одинъ или нѣсколько такихъ, которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ равенъ наименьшему возможному значенію.

Итакъ пусть $P(x)$ будетъ тотъ изъ подлежащихъ сравненію многочленовъ степени n, который наименѣе уклоняется отъ нуля. Обозначимъ черезъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ точки, въ которыхъ модуль $P(x)$ получаетъ наибольшее значеніе L, и черезъ ξ—ту точку, гдѣ $P'(x).\varphi(x)$ достигаетъ максимума M.

Я говорю, что нельзя найти такого многочлена $F_n(x)$ степени n, который бы удовлетворялъ уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \ldots F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n'(\xi).\varphi(\xi) = 0 \quad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ равенства (2) были осуществлены, то можно было бы построить многочленъ $P - \lambda F_n$ степени не выше n, выбравши положительное число λ слѣдующимъ образомъ: окружимъ точки $x_1, x_2, \ldots x_k$ промежутками достаточно малыми, чтобы $P(x)$ и $F_n(x)$ сохраняли въ каждомъ изъ нихъ тотъ же самый знакъ и отнимемъ эти промежутки изъ отрѣзка $(-1, +1)$; тогда въ оставшейся части отрѣзка $|P(x)| < L - \delta$, гдѣ δ нѣкоторое опредѣленное положительное число (меньшее, если хотимъ, чѣмъ $\frac{L}{2}$); послѣ этого мы выберемъ положительное количество λ настолько малымъ, чтобы $\lambda|F_n(x)| < \delta$. Въ такомъ случаѣ оказалось бы, что многочленъ $P - \lambda F_n$ по абсолютному значенію всегда менѣе (и никогда не равенъ) L, такъ какъ въ отнятыхъ промежуткахъ $|P - \lambda F_n| < |P| \leq L$, и въ оставшейся части отрѣзка $|P - \lambda F_n| < (L - \delta) + \delta = L$, при чемъ $[P'(\xi) - \lambda F_n'(\xi)].\varphi(\xi) = M$. Поэтому обозначая черезъ $M_1 (M_1 \geq M)$ максимумъ $[P'(x) - \lambda F_n'(x)].\varphi(x)$, убѣждаемся, что многочленъ $[P(x) - \lambda F_n(x)].\frac{M}{M_1}$ подлежалъ бы сравненію, уклоняясь отъ нуля менѣе, чѣмъ $P(x)$, что противорѣчило бы нашему допущенію, что среди подлежащихъ сравненію многочленовъ нѣтъ такого, который уклоняется отъ нуля менѣе, чѣмъ $P(x)$.

Слѣдовательно, система уравненій (2) не имѣетъ рѣшенія, а потому, либо число уравненій $(k+1)$ больше числа неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $(n+1)$, т. е. $k > n$, либо $k \leq n$ и всѣ опредѣлители $(k+1)$-го порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^n & x_k^{n-1} & \dots & x_k & 1 \\ n\zeta^{n-1} & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

равны нулю (такъ какъ, очевидно, $\varphi(\zeta) \gtreqless 0$).

Въ первомъ случаѣ $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ степень многочлена $P(x)$ равна n, то во всякомъ случаѣ $k \leq n+1$; поэтому при допущеніи, что $k > n$, находимъ $k=n+1$. Такимъ образомъ, изъ значеній $x_1, x_2, \dots x_k$, два равны $+1$ и -1, а остальныя суть $(n-1)$ корень уравненія $P'(x)=0$. Такъ какъ съ другой стороны всѣ эти значенія обращаютъ въ нуль $P^2(x)-L^2$, то всѣ корни $P'(x)=0$ суть двойные корни уравненія $P^2(x)-L^2=0$, имѣющаго еще всего два простыхъ корня $+1$ и -1. Отсюда выводимъ дифференціальное уравненіе Чебышева

$$P^2(x) - L^2 = \frac{(x^2-1)\,.\,[(P'(x)]^2}{n^2}, \tag{3}$$

единственнымъ раціональнымъ рѣшеніемъ котораго служитъ $L \cos n \arccos x$ Слѣдовательно, $P(x) = L \cos n \arccos x$.

Во второмъ случаѣ, $k=n$. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $k<n$, то $P(x)+(ax+b)\,R(x)$, гдѣ $R(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$, былъ бы многочленомъ степени не выше n. Но полагая $F_n(x)=P(x)+(ax+b)\,.\,R(x)$, мы можемъ, очевидно выбрать коэффиціенты (a, b) такъ, чтобы всѣ уравненія (2) были удовлетворены; для этого достаточно удовлетворить уравненію

$$P'(\zeta) + aR(\zeta) + (a\zeta + b)\,.\,R'(\zeta) = 0, \tag{2$^{\text{bis}}$}$$

къ которому приводится послѣднее изъ уравненій (2), между тѣмъ какъ первыя k уравненій удовлетворены тождественно. Уравненіе же (2^{bis}) всегда разрѣшимо, ибо не можетъ быть одновременно $R'(\zeta)=0$ и $R(\zeta)=0$. Но такъ какъ по доказанному уравненія (2) несовмѣстимы, слѣдовательно $k=n$.

Однако, какъ мы увидимъ, для функцій $\varphi(x)$, разсматриваемыхъ нами, второй случай вообще не можетъ представиться. Для этого перейдемъ къ слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ предположенія, что $k=n$.

Прежде всего мы замѣчаемъ, полагая $F_n(x)=P(x)+bR(x)$, что уравненія (2) приводятся къ единственному уравненію $P'(\zeta)+bR'(\zeta)=0$,

которое будетъ неразрѣшимо лишь въ случаѣ, когда [illegible]
образомъ ζ есть корень уравненія

$$R'(x)=0.$$

Но

$$R(x)=C\frac{(x^2-1)\cdot P'(x)}{x-\beta},$$

гдѣ C—постоянный множитель, β—тотъ изъ корней [illegible]

$$(x^2-1)\,P'(x)=0,$$

котораго не хватаетъ уравненію $R(x)=(x-x_1)\ldots$ [illegible]
ζ удовлетворяетъ одновременно уравненіямъ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2-1)\cdot P'(x)}{x-\beta}\right]=0 \quad \text{и} \quad (x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}\left[P'(x)\cdot\varphi(x)\right] \ldots$$

Легко обнаруживается несовмѣстимость этихъ [illegible] $\varphi(x)=1-x^2$. Тогда, очевидно, $\zeta^2-1<0$, такъ что [illegible] обращается въ

$$\frac{d}{dx}\left[P'(x)\cdot(1-x^2)\right]=0,$$

вслѣдствіе чего первое уравненіе приводится къ [illegible] можно, такъ какъ $|P'(x)\cdot(1-x^2)|$ при $x=\zeta$, по предположенію, [illegible] гаетъ своего наибольшаго значенія M.

Докажемъ, что случай $k=n$ также не представляется, [illegible] $=\sqrt{1-x^2}$, какъ это имѣетъ мѣсто въ условіи теоремы. [illegible] $P'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=P_1(x)$, то уравненія (4) примутъ форму

$$\frac{d}{dx}\left[P_1\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\right]=0, \quad \frac{dP_1}{dx}=0,$$

или

$$\frac{dP_1}{dx}\cdot(1-x^2)(x-\beta)+P_1\cdot(\beta x-1)=0, \quad \frac{dP_1}{dx}=0,$$

откуда

$$\beta x-1=0;$$

поэтому $\zeta=\frac{1}{\beta}$. И такъ какъ $|\zeta|<1$, слѣдовательно,

$$|\beta|>1.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что $P(x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію вида

$$P^2 - L^2 = \frac{(P')^2 \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+bx+c)}{n^2 (x-\beta)^2}. \tag{5}$$

Дѣйствительно, многочленъ $P^2 - L^2$ степени $2n$ имѣетъ двойными корнями тѣ изъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$, которыя отличны отъ ± 1 (такъ какъ онѣ обращаютъ въ нуль P'), и простыми корнями тѣ изъ значеній, которыя равны ± 1. $P^2 - L^2$ дѣлится поэтому на многочленъ $(2n-2)$-ой степени $\dfrac{P'^2 \cdot (x^2-1)}{(x-\beta)^2}$, и такъ какъ коэффиціентъ перваго члена дѣлимаго въ n^2 разъ меньше коэффиціента перваго члена дѣлителя, то частное имѣетъ форму $\dfrac{x^2+bx+c}{n^2}$; откуда вытекаетъ уравненіе (5).

Я говорю, что корни уравненія

$$x^2 + bx + c = 0,$$

вещественны, имѣютъ тотъ же знакъ, что β, и больше его по абсолютному значенію. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ для опредѣленности, что $\beta > 0$; въ такомъ случаѣ $\beta > 1$. Если x, возрастая отъ единицы, достигаетъ значенія β, гдѣ P' обращается въ нуль, P^2 возрастаетъ отъ L^2 до нѣкотораго числа L_1^2, затѣмъ P^2 убываетъ; но, такъ какъ P' болѣе не мѣняетъ знака, то P^2, пройдя, при $x = \gamma > \beta$, черезъ значеніе L^2, обращается въ нуль, и послѣ этого возрастаетъ до безконечности, проходя снова черезъ значеніе L^2, при $x = \delta > \gamma > \beta$. Очевидно, что γ и δ суть корни уравненія $x^2 + bx + c = 0$. Итакъ уравненіе (5) можемъ написать въ видѣ

$$P^2 - L^2 = \frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2 \cdot (x-\beta)^2} \cdot (P')^2, \tag{6}$$

при чемъ $\gamma > \beta > 0$ и $\delta > \beta > 0$. (То же самое разсужденіе привело бы, при $\beta < 0$, къ $\gamma < \beta < 0$ и $\delta < \beta < 0$).

Слѣдовательно, для $|x| < 1$, имѣемъ

$$\Theta^2 \cdot (L^2 - P^2) = \frac{(1-x^2) \cdot (P')^2}{n^2}, \tag{6^{\text{bis}}}$$

гдѣ $\Theta < 1$; поэтому

$$|P' \cdot \sqrt{1-x^2}| \leq n\Theta L.$$

Такимъ образомъ, если бы $k=n$, то, несомнѣнно, ... значеніе L модуля $P(x)$, удовлетворяло бы неравенству L ... Напротивъ, при $k=n+1$, мы нашли, что $P(x)=L\cos n$ ... $|P'.\sqrt{1-x^2}|=Ln\,|\sin n\arccos x|$; такъ что въ этомъ ... Слѣдовательно, только случай, когда $P(x)$ есть ... многочленъ, приводитъ къ наименьшему значенію для L ... $L=\frac{M}{n}$, ч. и. т. д.

3. Слѣдствія. *a) Если на отрѣзкѣ* $(-h, +h)$ ... $|P'_n(x).\sqrt{h^2-x^2}|$ *достигаетъ значенія* M, *то, при* ... $P_n(x)$ *есть многочленъ степени* n, $|P_n(x)|$ *не можетъ* ... *ваемомъ отрѣзкѣ оставаться менѣе* $\frac{M}{n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x=hx_1$. Въ такомъ ... $P_n(x)=P_n(hx_1)=Q_n(x_1)$, и $P'_n(x).\sqrt{h^2-x^2}=Q'_n(x_1)\sqrt{1-x_1^2}$ ... няя къ $Q_n(x_1)$ только что доказанную теорему, заключаемъ, ... какъ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, $|Q'_n(x).\sqrt{1-x_1^2}|$ достигаетъ ... слѣдовательно $|Q_n(x_1)|$ на томъ же отрѣзкѣ $(-1, +1)$, ... отрѣзкѣ $(-h, +h)$, не можетъ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

b) Если на отрѣзкѣ (a, b) *произведеніе* $|P'_n.\sqrt{(a-x)(x-b)}|$ *до-* *стигаетъ значенія* M, *то* $|P_n(x)|$ *на этомъ отрѣзкѣ* ... *менѣе* $\frac{M}{n}$.

Это вытекаетъ изъ доказаннаго слѣдствія, если ... $x_1=x-\frac{a+b}{2}$.

c) Если на отрѣзкѣ (a, b) $|P_n(x)|\leqq L$, *то на томъ же отрѣзкѣ* $|P'_n(x).\sqrt{(a-x)(x-b)}|\leqq nL$.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $|P'_n(x).\sqrt{(a-x)(x-b)}|$ достигало ... значенія $M=nL+\varepsilon$, то $|P_n(x)|$ въ силу предыдущаго слѣдствія ... лучало бы значеніе $\frac{M}{n}=L+\frac{\varepsilon}{n}$, что противорѣчитъ условію.

4. Теорема А. А. Маркова [1]. *Многочленъ n-ой степени* $P_n(x)$ *на от-* *рѣзкѣ* $(-1, +1)$ *не остается менѣе* $\frac{M}{n^2}$ *по абсолютному значенію, если на томъ же отрѣзкѣ* $|P'_n(x)|$ *достигаетъ* M.

---

[1] А. Марковъ. Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева. 1889. Изъ ... А. А. Маркова вытекаетъ въ сущности также и теорема (2), хотя она и не ... рована въ упомянутой статьѣ.

Очевидно, что вся первая часть доказательства теоремы (2) (до спеціализаціи функціи $\varphi(x)$) остается въ силѣ. Въ данномъ случаѣ мы должны положить въ уравненіяхъ (4) $\varphi(x)=1$; такимъ образомъ, если многочленъ $P(x)$, дающій наименьшее отклоненіе L, не тригонометрическій многочленъ и достигаетъ максимальнаго отклоненія только въ n точкахъ, то значеніе ζ, при которомъ $|P'(x)|$ достигаетъ максимума M, удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\frac{dP'}{dx}\cdot(x^2-1)(x-\beta)+P'[2x(x-\beta)-(x^2-1)]=0,\quad (x^2-1)\frac{dP'}{dx}=0. \tag{4^{bis}}$$

Слѣдовательно, либо $\zeta=\pm 1$; тогда $\beta=\zeta$. Либо $|\zeta|<1$; тогда

$$\zeta^2-2\beta\zeta+1=0,$$

такъ что $|\beta|>1$.

Въ первомъ случаѣ, полагая для опредѣленности $\beta=\zeta=1$, наибольшее значеніе $|P(x)|$ достигается въ $(n-1)$ внутреннихъ точкахъ, гдѣ $P'(x)=0$, и въ точкѣ $x=-1$. Поэтому $P(x)$ будетъ удовлетворять дифференціальному уравненію

$$P^2-L^2=\frac{(1+x)(x-\alpha)}{n^2}\cdot(P')^2, \tag{7}$$

причемъ $\alpha>1$, такъ какъ, при $x=1$, $P^2<L^2$. Слѣдовательно,

$$P=L\cos n\arccos\frac{2x+\alpha-1}{\alpha+1}.$$

Во второмъ случаѣ, P опять долженъ удовлетворять уравненію (6) съ соблюденіемъ тѣхъ же неравенствъ относительно β, γ, δ. Поэтому, по прежнему,

$$\Theta^2(L^2-P^2)=\frac{(1-x^2)\,(P')^2}{n^2}, \tag{6^{bis}}$$

гдѣ $\Theta<1$.

Наконецъ, въ случаѣ когда $k=n+1$, $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ, удовлетворяющій, какъ мы видѣли, уравненію (3), которое можно получить изъ уравненія (6^{bis}), полагая въ послѣднемъ $\Theta=1$.

Введемъ новыя перемѣнныя, опредѣляемыя уравненіями

$$P=\pm L\cos z,\quad x=\cos t;$$

(знакъ $+$ возьмемъ, если при $x=1$, $P=L$, въ противномъ случаѣ возьмемъ $-$); тогда уравненіе (6^{bis}) преобразуется въ

$$\Theta^2L^2\sin^2 z=\frac{L^2\sin^2 z}{n^2}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

откуда $\left|\frac{dz}{dt}\right| = n\Theta$. Такъ какъ, при $x = 1$, $P = \pm L$, то можно положить $z = 0$, при $t = 0$. Слѣдовательно, $z = n\Theta_1 t$, гдѣ $|\Theta_1| < 1$ для уравненія (6^{bis}), и $\Theta_1 = 1$ для уравненія (3). Откуда

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 n\Theta_1 t = \frac{\sin^2 t}{n^2} . (P')^2;$$

поэтому

$$L = \left| \frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t} P' \right| > \frac{M}{n^2},$$

если $\Theta < 1$, $|\Theta_1| < 1$, и $L = \frac{M}{n^2}$, если $\Theta = \Theta_1 = 1$, такъ какъ $|P'|$ наибольшее значеніе M, очевидно, принимаетъ, когда $\left|\frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t}\right|$ получаетъ наименьшее значеніе (которое больше, чѣмъ $\frac{1}{n^2}$ въ первомъ случаѣ, и равно $\frac{1}{n^2}$ во второмъ случаѣ). Итакъ, отклоненіе L тригонометрическаго многочлена при томъ же M было бы менѣе отклоненія многочлена $P(x)$, удовлетворяющаго уравненію (6^{bis}); а потому $P(x)$ не можетъ удовлетворять уравненію (6^{bis}). $P(x)$ не можетъ удовлетворять и уравненію (7), ибо въ этомъ случаѣ $P(x) = L \cos n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}$, а

$$P'(x) = \frac{2nL \sin n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}}{(\alpha + 1) . \sin \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}},$$

откуда $M < n^2 L$, такъ какъ $\alpha > 1$.

Такимъ образомъ $|P_n(x)|$ остается возможно малымъ, если $P_n(x)$ тригонометрическій многочленъ; но даже въ этомъ случаѣ многочленъ $P(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія $L = \frac{M}{n^2}$, ч. и. т. д.

5. Слѣдствія. *a) Изъ всѣхъ многочленовъ степени n, производная которыхъ достигаетъ даннаго абсолютнаго значенія на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ наименѣе уклоняется отъ нуля на этомъ отрѣзкѣ тригонометрическій многочленъ.*

b) Если на отрѣзкѣ (a, b) производная многочлена n-ой степени $P_n(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія M, то $|P_n(x)|$ на этомъ отрѣзкѣ не остается менѣе $\frac{|b-a| . M}{2n^2}$.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно сдѣлать линейное преобразованіе $x = \frac{b-a}{2} x_1 + \frac{b+a}{2}$.

c) Если[1] *на отрѣзкѣ* (a, b) *многочленъ n-ой степени* $P_n(x)$ *не превышаетъ по абсолютному значенію* L, *то* $|P'_n(x)|$ *на томъ же отрѣзкѣ не превышаетъ* $\frac{2n^2L}{b-a}$.

d) Если на отрѣзкѣ (a, b) $|P_n(x)|$ *не превышаетъ* L, *то* $\left|\frac{d^kP_n(x)}{dx^k}\right|$ *не превышаетъ* $\left(\frac{2}{b-a}\right)^k . n^2.(n-1)^2 \ldots (n-k+1)^2.L$ *на томъ же отрѣзкѣ*[2].

Это вытекаетъ изъ k — кратнаго повторенія предыдущаго слѣдствія.

6. Теорема. *Изъ всѣхъ многочленовъ степени n, принимающихъ въ данной точкѣ, не лежащей на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *абсолютное значеніе* M, *наименьше уклоняется отъ нуля на этомъ отрѣзкѣ тригонометрическій многочленъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ соображеній, совершенно аналогичныхъ приведеннымъ при доказательствѣ теоремы (2), убѣждаемся, что среди многочленовъ, подлежащихъ разсмотрѣнію, существуетъ такой $P(x)$, который достигаетъ наименьшаго отклоненія L. Обозначая черезъ x_1, $x_2, \ldots x_n$ значенія, гдѣ $|P(x)| = L$, а черезъ ξ данное значеніе, гдѣ $P(\xi) = M$, находимъ подобно предыдущему, что никакой многочленъ $F_n(x)$ степени n не можетъ удовлетворить уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \ldots F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n(\xi) = 0,$$

---

[1]) Это есть формулировка теоремы А. А. Маркова, данная имъ въ выше упомянутой статьѣ; къ сожалѣнію, съ этой работой такъ же, какъ и съ сочиненіемъ В. А. Маркова „О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля“ (1892) я познакомился лишь послѣ того, какъ предварительныя алгебраическія теоремы, составляющія содержаніе настоящей главы, были мной самостоятельно найдены и доказаны. Несомнѣнно, болѣе раннее знакомство съ идеями этихъ ученыхъ, упростило бы мою задачу, а также, быть можетъ, и изложеніе этой главы. Но измѣнять уже вполнѣ законченныя доказательства я не счелъ нужнымъ въ виду вспомогательной роли упомянутыхъ теоремъ, и такъ какъ мнѣ казалось, кромѣ того, что примѣненіе общаго метода В. А. Маркова, могущаго дать даже больше того, что намъ здѣсь нужно, не упростило бы изложенія; разсужденія же А. А. Маркова, которыми въ нѣкоторыхъ случаяхъ было бы цѣлесообразно воспользоваться, въ другихъ случаяхъ, повидимому, нуждались бы въ значительныхъ дополненіяхъ (напр. для доказательства теоремы (8)).

[2]) Въ упомянутой выше работѣ В. Марковъ, подобно тому какъ это уже было сдѣлано для 1-й производной, даетъ максимумъ, котораго k-ая производная дѣйствительно можетъ достигнуть. Мы же указываемъ здѣсь лишь верхнюю границу этого максимума, вполнѣ однако достаточную для тѣхъ выводовъ, которые будутъ сдѣланы въ слѣдующей главѣ.

что будетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда $k > n$. Слѣдовательно, $k = n + 1$, и $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ; ч. и. т. д.

7. Слѣдствія. *a) Если на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *многочленъ степени n достигаетъ максимума L, то наибольшее абсолютное значеніе, какое онъ можетъ получить въ точкѣ* ξ *(не лежащей на этомъ отрѣзкѣ) есть*

$$M = L \left| \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n}{2} \right| \tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ, указанное значеніе M есть абсолютное значеніе получаемое въ точкѣ ξ соотвѣтствующимъ тригонометрическимъ многочленомъ.

b) Если обозначить черезъ R полусумму осей эллипса, проходящаго черезъ точку ξ *и имѣющаго фокусами* $(-1, +1)$, *то имѣетъ мѣсто неравенство*

$$M < LR^n. \tag{9}$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$\xi = \frac{1}{2}\left[(e^b + e^{-b})\cos a + i(e^b - e^{-b})\sin a\right] = \cos(a - bi).$$

Въ такомъ случаѣ, если b получаетъ опредѣленное положительное значеніе, ξ находится на эллипсѣ, имѣющемъ фокусами $(-1, +1)$, а осями $e^b + e^{-b}$ и $e^b - e^{-b}$. Съ другой стороны,

$$M = L\left|\cos n(a - bi)\right| = \frac{L}{2}\left|\cos na\,.(e^{nb} + e^{-nb}) + i\sin na\,.(e^{nb} - e^{-nb})\right| =$$

$$= \frac{L}{2}\,.\sqrt{e^{2nb} + e^{-2nb} + 2\cos 2na}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{L}{2}(e^{nb} - e^{-nb}) \leq M \leq \frac{L}{2}(e^{nb} + e^{-nb}) < Le^{nb}.$$

Но

$$e^b = \frac{(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})}{2} = R$$

есть полусумма осей разсматриваемаго эллипса. Откуда

$$M < LR^n.$$

Примѣчаніе. Легко провѣрить, что неравенство (9) останется въ силѣ, если отрѣзокъ $(-1, +1)$ замѣнить любымъ отрѣзкомъ (α, β); только R будетъ тогда обозначать отношеніе суммы осей эллипса, проходящаго черезъ ξ и имѣющаго фокусами (α, β), къ фокусному разстоянію.

8. Теорема. *Если $P_n(x)$ есть многочленъ n-ой степени, и на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$ *существуютъ значенія x, y, для которыхъ*

$$E(x, y)=\left|\frac{P_n(x)-P_n(y)}{(x-y)^\alpha}\right|.(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}(1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}}=M,$$

при $0 \leqq \alpha < 1$, *то* $|P_n(x)|$ *не остается менѣе* $\frac{M}{n^\alpha 2^{1-\alpha}}$ *на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, подобно предыдущему, убѣждаемся въ существованіи многочлена $P(x)$, для котораго максимумъ $|P(x)|$ достигаетъ наименьшаго возможнаго значенія. Кромѣ того, если (x, y) суть значенія, для которыхъ $E(x, y)$ максимумъ, $x_1, x_2, \dots x_k$ — значенія, гдѣ $|P(x)|$ максимумъ, то уравненія

$$F_n(x_1)=P(x_1), \dots, F_n(x_k)=P(x_k), \quad F_n(x)-F_n(y)=0 \qquad (10)$$

не совмѣстимы. Поэтому, если P не тригонометрическій многочленъ, то $k=n$, и полагая

$$F_n(x)=P(x)+b(x-x_1)(x-x_1)\dots(x-x_n)=P(x)+bR(x),$$

находимъ, что уравненія (10) приводятся къ

$$P(x)-P(y)+b(R(x)-R(y))=0,$$

которое будетъ неразрѣшимо только, если

$$R(x)=R(y),$$

т. е. если

$$\frac{P'(x).(x^2-1)}{x-\beta}=\frac{P'(y).(y^2-1)}{y-\beta}.$$

Но съ другой стороны (x, y) удовлетворяютъ уравненіямъ, выражающимъ, что $|E(x, y)|$ максимумъ:

$$(1-x^2)[P'(x).(x-y)-\alpha(P(x)-P(y))]-\alpha x(x-y)(P(x)-P(y))=0,$$

$$(1-y^2)[P'(y).(y-x)-\alpha(P(y)-P(x))]-\alpha y(y-x)(P(y)-P(x))=0,$$

или,

$$P'(x).(1-x^2)=\alpha\frac{P(x)-P(y)}{x-y}.(1-xy)=A\gtreqless 0$$

и

$$P'(y).(1-y^2)=\alpha\frac{P(x)-P(y)}{x-y}(1-xy)=A\gtreqless 0.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{A}{x-\beta}=\frac{A}{y-\beta},$$

что невозможно, такъ какъ $x \gtrless y$. Слѣдовательно, P есть ... ческій многочленъ, $P=L\cos n \arccos x$.

Остается вычислить максимумъ $|E(x, y)|$ для этого многочлена. Съ этой цѣлью, полагаемъ

$$x=\cos\Theta, \quad y=\cos\varphi, \quad (0<\Theta<\pi; \quad 0<\varphi<\pi).$$

Въ такомъ случаѣ,

$$E(x, y)=L\frac{\cos n\Theta-\cos n\varphi}{(\cos\Theta-\cos\varphi)^\alpha}.(\sin\Theta\sin\varphi)^\alpha=$$

$$=L\left(\frac{\cos n\Theta-\cos n\varphi}{\cos\Theta-\cos\varphi}\right)^\alpha(\cos n\Theta-\cos n\varphi)^{1-\alpha}(\sin\Theta\sin\varphi)^\alpha \leq$$

$$\leq L\left(\frac{\sin\frac{n}{2}(\Theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\varphi)}\right)^\alpha.\left(\frac{\sin\Theta\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\Theta+\varphi)}\right)^\alpha.(\cos n\Theta-\cos n\varphi)^{1-\alpha} \ldots$$

Поэтому

$$M<2^{1-\alpha}n^\alpha L,$$

откуда

$$L>\frac{M}{2^{1-\alpha}n^\alpha}, \text{ ч. и т. д.}$$

Примѣчаніе. Аналогичнымъ образомъ получимъ, что наибольшее значеніе

$$\left|\frac{P_n(x)-P_n(y)}{(x-y)^\alpha}\right|\sqrt{(h^2-x^2)^\alpha(h^2-y^2)^\alpha}$$

на отрѣзкѣ $(-h, +h)$ менѣе, чѣмъ $L.2^{1-\alpha}(nh)^\alpha$

9. Теорема. *Произведеніе* $|P_n(x).\sqrt{1-x^2}|$, *гдѣ* $P_n(x)$ *многочленъ ... степени, не можетъ оставаться менѣе* $\frac{M}{n+1}$ *на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *если* $\left|\frac{d}{dx}\left(P_n.\sqrt{1-x^2}\right)\right|.\sqrt{1-x^2}$ *достигаетъ значенія* M *на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, подобно предыдущему, убѣждаемся въ существованіи многочлена $P(x)$, *осуществляющаго минимальное отклоненіе, также и въ томъ, что число* k *точекъ, гдѣ оно имѣетъ мѣсто, ... или равно* n. *Случай* $k=n$, *вслѣдствіе несовмѣстимости ...*

$$F_n(x_1) = P(x_1), \ldots, F_n(x_k) = P(x_k), \ \frac{d}{dx}[F_n(\xi) . \sqrt{1-\xi^2}] = 0,$$

приводитъ къ невозможности уравненія

$$\frac{d}{dx}[P(\xi) . \sqrt{1-\xi^2}] + b\frac{d}{dx}[R(\xi) . \sqrt{1-\xi^2}] = 0.$$

гдѣ

$$R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k),$$

откуда слѣдуетъ, что ξ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d}{dx}[R(x) . \sqrt{1-x^2}] = 0. \qquad (11)$$

При этомъ нужно замѣтить, что $|P(x)\sqrt{1-x^2}|$ достигаетъ максимума лишь во внутреннихъ точкахъ, обращающихъ въ нуль

$$\frac{d}{dx}(P(x) . \sqrt{1-x^2}) = \frac{P'(x) . (1-x^2) - xP(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{T(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. не болѣе чѣмъ въ $(n+1)$ точкахъ, удовлетворяющихъ уравненію $P'(x) . (1-x^2) - xP(x) = 0$; поэтому

$$R(x) = \frac{CT(x)}{x-\beta},$$

такъ что уравненіе (11) превращается въ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{T(x) . \sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\right) = 0, \qquad (11^{bis})$$

Но M, по предположенію, наибольшее значеніе

$$\left[\frac{d}{dx}(P . \sqrt{1-x^2})\right] . \sqrt{1-x^2} = T(x):$$

поэтому ξ удовлетворяетъ также уравненію

$$T'(x) = 0.$$

Слѣдовательно, уравненіе (11^{bis}) приводится (какъ въ теоремѣ 2) къ

$$T(x) . (\beta x - 1) = 0,$$

и такъ какъ $T(\xi) \gtrless 0$, то $\beta = \frac{1}{\xi}$, откуда $|\beta| > 1$.

Замѣчая далѣе, что $S = P.\sqrt{1-x^2}$ достигаетъ n разъ наибольшаго абсолютнаго значенія L, заключаемъ, что

$$S^2 - L^2 = \frac{(S')^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{(x-\beta)^2},$$

при чемъ, подобно предыдущему, находимъ, что $|\gamma| > |\beta|$, $|\delta| > |\beta|$ и $\gamma\beta > 0$, $\delta\beta > 0$.

Поэтому

$$\Theta^2 (S^2 - L^2) = \frac{S'^2 . (x^2-1)}{(n+1)^2},$$

гдѣ $\Theta < 1$. Откуда

$$|S'.\sqrt{1-x^2}| = |T(x)| < (n+1)L, \quad \text{т. е.} \quad L > \frac{M}{n+1}.$$

Напротивъ, если $n = k+1$, то

$$S^2 - L^2 = \frac{(S')^2 . (x^2-1)}{(n+1)},$$

такъ что $S = L \sin(n+1)\arccos x$ и

$$P = \frac{L \sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

слѣдовательно $L = \dfrac{M}{n+1}$, ч. и т. д.

10. Примѣненіе предыдущаго къ тригонометрическимъ суммамъ.

Условимся называть тригонометрической суммой n-го порядка выраженіе вида

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \ldots + A_n \cos nt + B_n \sin nt;$$

если всѣ $B_i = 0$, то выраженіе будетъ называться (тригонометрическою) суммою косинусовъ n-го порядка; если же всѣ $A_i = 0$, то это будетъ сумма синусовъ того же порядка. Всѣ выше доказанныя теоремы приводятъ къ аналогичнымъ предложеніямъ относительно тригонометрическихъ суммъ, если положить $x = \cos t$, и замѣтить, что всегда возможно съ одной стороны отожествить выраженія

$$a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos^n t \quad \text{и} \quad A_0 + A_1 \cos t + \ldots + A_n \cos nt,$$

и, съ другой стороны, отожествить

$$\sin t [b_0 + b_1 \cos t + \ldots + b_n \cos^n t] \quad \text{и} \quad B_0 \sin t + \ldots + B_n \sin(n+1)t.$$

Ограничимся лишь формулировкой предложеній, соотвѣтствующихъ теоремамъ (2) и (9).

Если абсолютное значеніе суммы косинусовъ n-аго порядка

$$x = A_0 + A_1 \cos t + \ldots + A_n \cos nt$$

не превышаетъ L, то абсолютное значеніе ея производной $-(A_1 \sin t + \ldots + nA_n \sin nt)$ *не превышаетъ никогда nL, послѣднее значеніе достигается только при* $A_0 = A_1 = \ldots A_{n-1} = 0$.

Дѣйствительно, полагая $x = \cos t$, мы превращаемъ x въ многочленъ n-ой степени $P_n(x)$; при этомъ $\frac{dx}{dt} = -P'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Такимъ же точно образомъ легко вывести изъ теоремы (9) предложеніе:

Если абсолютное значеніе суммы синусовъ n-го порядка

$$B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \ldots + B_n \sin nt$$

не превышаетъ L, то абсолютное значеніе ея производной

$$B_1 \cos t + \ldots + nB_n \cos nt$$

не превышаетъ nL. (Послѣднее значеніе достигается только при $B_1 = B_2 = \ldots = B_{n-1} = 0$).

Эти два предложенія можно обобщить слѣдующимъ образомъ:

Если абсолютное значеніе тригонометрической суммы n-го порядка

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \ldots + A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

не превышаетъ L, то производная ея

$$-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \ldots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

остается меньше, чѣмъ $2nL$ по абсолютному значенію.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть L_1 будетъ наибольшее значеніе модуля суммы косинусовъ, а L_2—наибольшее значеніе модуля суммы синусовъ. Ясно, что въ такомъ случаѣ,

$$L \geqq L_1 \quad \text{и} \quad L \geqq L_2,$$

ибо, если, напримѣръ, $\pm t_0$ суть значенія t, при которыхъ сумма косинусовъ равна L_1, то вся тригонометрическая сумма будетъ при этихъ значеніяхъ t равна $L_1 \pm k$, т. е. по крайней мѣрѣ при одномъ изъ значеній будетъ не менѣе L_1. Но, по доказанному,

$$|A_1 \sin t + \ldots + nA_n \sin nt| \leqq nL_1,$$

$$|B_1 \cos t + \ldots + nB_n \cos nt| \leqq nL_2.$$

Поэтому

$$|-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \ldots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt| \leqq n(L_1 - L_2) < 2nL$$

(случай равенства отпадаетъ, потому что всѣ неравенства одновременно не обращаются въ равенства), ч. и. т. д.

11. Производныя высшихъ порядковъ. Изъ первыхъ двухъ предложеній предыдущаго §'а вытекаетъ, что *если L есть наибольшее абсолютное значеніе суммы $A_0 + A_1 \cos t + \ldots + A_n \cos nt$, то наибольшее абсолютное значеніе ея p-ой производной не превышаетъ $n^p L$ (случай равенства имѣетъ мѣсто только при $A_0 = A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$).*

Этотъ результатъ можно преобразовать возвращаясь снова къ многочленамъ. А именно, полагая, что $|P_n(x)| = |a_0 + \ldots + a_n x^n|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ менѣе L, мы должны заключить, что

$$\left|\frac{d^k P_n(x)}{(d \arccos x)^k}\right| \leqq n^k L,$$

или

$$|P'_n \sqrt{1-x^2}| \leqq nL,$$

$$|P''_n(1-x^2) - xP'_n| \leqq n^2 L \text{ и т. д.}$$

Однако этими неравенствами мы въ дальнѣйшемъ пользоваться не будемъ, и замѣнимъ ихъ менѣе точными, но болѣе удобными. Съ этой цѣлью, замѣчаемъ, что

$$|P'_n(x)| \leqq \frac{nL}{\sqrt{1-x^2}};$$

но въ такомъ случаѣ P'_n — многочленъ $(n-1)$-ой степени, который въ промежуткѣ $(-x_1, +x_1)$ менѣе, чѣмъ $\frac{nL}{\sqrt{1-x_1^2}}$, а потому

$$|P''_n(x)| < \frac{n(n-1)L}{\sqrt{(x_1^2 - x^2)(1-x_1^2)}},$$

и, повторяя то же разсужденіе, найдемъ

$$| P_n^{(k)} | < \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)L}{\sqrt{(x_{k-1}^2-x^2)\ldots(1-x_1^2)}}.$$

Полагая же $1-x_1^2=x_1^2-x_2^2=\ldots=x_{k-1}^2-x^2=\frac{1-x^2}{k}$, получимъ наконецъ

$$| P_{(n)}^{(k)} | < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} n(n-1)\ldots(n-k+1).L. \tag{12}$$

Аналогичнымъ образомъ можно провѣрить правильность неравенства

$$\left|\frac{P_n^{(k)}(z)-P_n^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha} 2n(n-1)\ldots(n-k+1)\left(\frac{n-k}{2}\right)^\alpha L, \quad (12^{\text{bis}})$$

при

$$|z| \leq x, \quad |z_1| \leq x.$$

Глава II.

Опредѣленіе низшаго предѣла уклоненія непрерывной функціи отъ многочлена данной степени.

12. Теорема. *Пусть будетъ данъ рядъ*

$$f(x) = u_1 + \dots + u_n + \dots, \tag{13}$$

гдѣ $u_n(x)$ многочленъ степени не выше n. Если этотъ рядъ сходится на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, и при томъ

$$|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A}{n^p},$$

гдѣ A постоянная величина, то $f(x)$ имѣетъ во всякой точкѣ внутри отрѣзка $(-1, +1)$ непрерывную и конечную производную k-го порядка, обозначая черезъ k наибольшее цѣлое число, меньшее чѣмъ p; кромѣ того эта производная удовлетворяетъ условіямъ Липшица степеней сколь угодно близкихъ къ $p-k$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots$$

имѣемъ, по условію,

$$|R_n| < \frac{A}{n^p};$$

поэтому, въ частности,

$$|R_{2^m}| < \frac{A}{2^{mp}}, \quad |R_{2^{m+1}}| < \frac{A}{2^{(m+1)p}}.$$

Слѣдовательно, если обозначимъ черезъ v_m многочленъ степени $2^{m+1}-1$

$$v_m = R_{2^m} - R_{2^{m+1}} = u_{2^m} + u_{2^m+1} + \dots + u_{2^{m+1}-1},$$

то

$$|v_m| < \frac{A}{2^{mp}} + \frac{A}{2^{(m+1)p}} < \frac{2^{p+1} \cdot A}{2^{(m+1)p}}; \tag{14}$$

такимъ образомъ указанной группировкой членовъ мы превращаемъ рядъ (13) въ абсолютно сходящійся рядъ

$$f(x) = v_0 + v_1 + \ldots + v_m + \ldots,$$

каждый членъ котораго есть многочленъ степени $2^{m+1} - 1$.

Дифференцируемъ почленно k разъ полученный рядъ, замѣчая, что, вслѣдствіе неравенствъ (12) и (14),

$$|v_m^{(k)}(x)| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{(m+1)k} \cdot \frac{2^{p+1}A}{2^{(m+1)p}} = 2^{p+1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}.$$

Слѣдовательно,

$$\varrho_m^{(k)} = |v_m^{(k)}(x) + v_{m+1}^{(k)}(x) + \ldots| < 2^{p+1}\left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} A \left[\left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{2^{p-k}-1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{A}{2^{(p-k)m}},$$

а потому рядъ

$$f^{(k)} = v_0^{(k)}(x) + \ldots + v_m^{(k)}(x) + \ldots$$

равномѣрно (и абсолютно) сходится во всякомъ промежуткѣ внутри отрѣзка $(-1, +1)$. Отсюда вытекаетъ существованіе конечной k-ой производной и ея непрерывность.

Вторая часть теоремы получится, если вмѣсто неравенства (12) мы воспользуемся неравенствомъ (12^{bis}). Полагая $p > k + \alpha$, находимъ

$$\left|\frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \sum_{m=0}^{m=\infty} \left|\frac{v_m^{(k)}(z) - v_m^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha} 2^{p+2} A \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{1}{2^{p-k-\alpha}}\right)^{m+1} =$$

$$= \frac{2^{p+2}A}{2^{p-k-\alpha}-1} \cdot \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha},$$

если $|z| \leq x$ и $|z_1| \leq x$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Примѣняя слѣдствіе (d) § 5-го, мы такимъ же образомъ убѣдились бы *въ конечности k-ой производной* и въ концахъ отрѣзка, если только $k < \frac{p}{2}$.

13. Слѣдствіе. *Рядъ (13) можетъ быть дифференцируемъ почленно k разъ, если $k < p$.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предшествующаго доказательства видно, что это дифференцированіе возможно при условіи соединенія въ одну группу членовъ $u_{2^m} + u_{2^m+1} + \ldots + u_{2^{m+1}-1} = v_m$. Но группировка (необходимая вообще для *абсолютной* сходимости) не является необходимой для [равно]мѣрной сходимости, ибо легко видѣть, что при всякомъ $N < 2^m$,

$$|u^{(k)}_{2^m} + \ldots + u^{(k)}_{2^m+N}| < 2^{p+1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}.$$

14. Теорема. *Если (при прежнихъ обозначеніяхъ)*

$$|u_n + u_{n+1} \ldots| < \frac{A_n}{n^p},$$

а рядъ

$$S = A_1 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2^m} + \ldots \qquad (15)$$

сходящійся, то, при p цѣломъ, функція $f(x)$ имѣетъ конечную и непрерывную производную p-го порядка во всякой точкѣ внутри от[рѣз]ка $(-1, +1)$; въ случаѣ же, когда $p = k + \alpha$, гдѣ k наиболь[шее цѣ]лое число меньшее, чѣмъ p, то k-ая производная удовлетворяет[ъ во вся]комъ промежуткѣ внутри того же отрѣзка условію Липшица сте[пени α].

Ограничимся случаемъ, когда p цѣлое число, такъ какъ вто[рая] часть теоремы доказывается такимъ же образомъ.

Полагая, какъ въ предыдущемъ §'Ѣ,

$$v_m = u_{2^m} + \ldots + u_{2^{m+1}-1}$$

находимъ, что

$$|v_m| < \frac{A_{2^{m+1}}}{2^{(m+1)p}} + \frac{A_{2^m}}{2^{mp}}.$$

А потому, пользуясь неравенствомъ (12), заключаемъ, что

$$|f^{(p)}(x)| \leq |v_0^{(p)}(x)| + |v_1^{(p)}(x)| + \ldots |v_m^{(p)}(x)| + \ldots <$$

$$< \left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}} (2^p + 1)(A_1 + A_2 + A_4 + \ldots A_{2^m}) = \left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}} (2^p + 1)\, S.$$

ч. и. т. д.

15. Слѣдствія. Въ условіи только что доказанной теоремы не [сдѣ]лано никакихъ предположеній относительно чиселъ A_n, кромѣ сходимо[сти] ряда (15).

Однако мы можемъ замѣтить, что группируя, если это понадоби[тся], члены ряда (13) всегда возможно превратить его въ рядъ того же ви[да].

но обладающій свойствомъ, что числа $\frac{A_n}{n^p}$ идутъ *не возрастая* съ возрастаніемъ n; другими словами, разсматривая конечную сумму $u_1+u_2+\ldots u_n$, какъ приближенный многочленъ степени n функціи $f(x)$, мы можемъ не вводить $(n+1)$-го члена, если онъ не увеличиваетъ приближенія, тогда $u_{n+1}=0$ и $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}=\frac{A_n}{n^p}$, и ввести затѣмъ сразу группу членовъ, дѣйствительно улучшающихъ приближеніе.

Въ такомъ случаѣ, легко убѣдиться въ слѣдующемъ:

Если есть такое число p, *что*

$$\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}\leqq\frac{A_n}{n^p},$$

то ряды

$$S=A_1+A_2+A_4+\ldots A_{2^n}\ldots \quad \text{и} \quad \Sigma=A_1+\frac{A_2}{2}+\frac{A_3}{3}+\ldots\frac{A_n}{n}+\ldots$$

или оба сходящіеся или оба расходящіеся.

Дѣйствительно, если $p\geqq1$, то

$$I_n=\frac{A_n}{n}+\frac{A_{n+1}}{n+1}+\ldots\frac{A_{2n-1}}{2n-1}=\frac{A_n}{n^p}\,n^{p-1}+\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}.(n+1)^{p-1}+\ldots\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p}.(2n-1)^{p-1}=$$

$$=n^{p-1}\left[\frac{A_n}{n^p}+\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1}+\ldots+\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p}.\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1}\right]<A_n.2^{p-1}$$

и, съ другой стороны,

$$I_n=n^{p-1}\left[\frac{A_n}{n}+\ldots\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p}.\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1}\right]>\left(\frac{n}{2n-1}\right)^p A_{2n-1}\geqq n^p.\frac{A_{2n}}{(2n)^p}=\frac{A_{2n}}{2^p}$$

Такимъ образомъ

$$\frac{A_{2n}}{2^p}<\frac{A_n}{n}+\frac{A_{n+1}}{n+1}+\ldots+\frac{A_{2n-1}}{2n-1}<A_n.2^{p-1},$$

и слѣдовательно,

$$\frac{S}{2^p}-A_1<\Sigma<2^{p-1}S; \qquad (p\geqq1)$$

если же $p\leqq1$, то подобнымъ же образомъ получимъ

$$\frac{S}{2}-A_1<\Sigma<S \quad (p\leqq1).$$

Итакъ при предположеніи, что $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leq \frac{A_n}{n_p}$, *условіе сходимости ряда* S *въ теоремѣ (13) можетъ быть замѣнено равнозначнымъ ему условіемъ сходимости ряда*

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots + \frac{A_n}{n} + \ldots \tag{15bis}$$

Для практическаго примѣненія теоремы (13) можемъ воспользоваться различными достаточными условіями сходимости. Такимъ образомъ условіе сходимости ряда (15) или (15^{bis}), можетъ быть замѣнено болѣе специальными условіями (неравнозначными предыдущимъ), а именно, напримѣръ, условіемъ, чтобы

$$A_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ или } A_n < \frac{1}{\log n \,.\, (\log\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

гдѣ ε нѣкоторое положительное число.

16. Теорема. *Пусть по прежнему*

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{13}$$

гдѣ u_n *многочленъ степени не выше* n, *и на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots| < \frac{A_n}{n^p},$$

гдѣ числа A_n *идутъ не возрастая; въ такомъ случаѣ, для всякаго цѣлаго значенія* $p_1 < p$,

$$f^{(p_1)}(x) = w_{p_1} + w_{p_1+1} + \ldots + w_n + \ldots$$

гдѣ w_n *многочленъ степени не выше* $n - p_1$, *при чемъ*

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}} |w_{2n} + w_{2n+1} + \ldots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1}}{2^{p-p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-p_1}}, \tag{16}$$

и, при $2p_1 < p$,

$$|w_{2n} + w_{2n+1} + \ldots| < \frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-2p_1}}. \tag{16bis}$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$f^{(p_1)}(x) = v_0^{(p_1)} + \ldots + v_m^{(p_1)} + \ldots$$

при чемъ, вслѣдствіе неравенства (12),

$$|v_m^{(p_1)}|+|v_{m+1}^{(p_1)}|+\ldots<\left(\frac{p_1}{1-x^2}\right)^{\frac{p_1}{2}}.2^{p+1}[A_{2^m}.2^{(m+1)(p_1-p)}+A_{2^{m+1}}.2^{(m+2)(p_1-p)}+\ldots]$$

$$\leq\left(\frac{p_1}{1-x^2}\right)^{\frac{p_1}{2}}.\frac{2^{p+1}.2^{(m+1)(p_1-p)}}{1-2^{p_1-p}}A_{2^m}.$$

Поэтому, полагая

$$w_n=v_m^{(p_1)},\quad \text{если}\quad n=2^{m+1}-1,$$

и

$$w_n=0,\quad \text{если}\quad n \gtrless 2^{m+1}-1,$$

находимъ,

$$f^{(p_1)}(x)=w_{p_1}+\ldots w_n+\ldots,$$

гдѣ w_n многочленъ степени не выше $(n-p_1)$, при чемъ

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}}|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|<\frac{p_1^{\frac{p_1}{2}}.2^{p+1}}{2^{p-p_1}-1}.\frac{A_n}{n^{p-p_1}}.$$

Точно также изъ слѣдствія (d) § 5 заключаемъ, что

$$|v_m^{(p_1)}|+|v_{m+1}^{(p_1)}|+\ldots<2^{p+1}[A_{2^m}.2^{(m+1)(2p_1-p)}+A_{2^{m+1}}2^{(m+2)(2p_1-p)}+\ldots]$$

$$\leq\frac{2^{p+1}.2^{(m+1)(2p_1-p)}}{1-2^{2p_1-p}}.A_{2^m},$$

откуда

$$|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|<\frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1}-1}.\frac{A_n}{n^{p-2p_1}}$$

Примѣчанія. a. Теорема, въ частности, примѣнима, если $A_n=A$ постоянная величина.

b. Замѣтимъ также, что $|u^{(p_1)}_{2n+l}+\ldots|$ удовлетворяютъ тѣмъ же неравенствамъ, что и $|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|$ при всякомъ $l\geq 0$.

c. Аналогичныя неравенства имѣютъ мѣсто, если вмѣсто производныхъ брать отношенія $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^p}$, при $p<1$.

17. Тригонометрическіе ряды. Принимая во вниманіе результаты § 10, легко видѣть, что предыдущія теоремы остаются въ силѣ, если въ ряду

$$f(x)=u_1+u_2+\ldots u_n+\ldots \qquad (13^{\text{bis}})$$

функціи u_n будутъ *тригонометрическими суммами n-аго порядка.* Такимъ образомъ:

Если $|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A_n}{n^p}$, *гдѣ* p *цѣлое число, и рядъ* $S = A_1 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2^m} \dots$ *сходящійся, то p-ая производная* $|f^{(p)}(x)|$ *будетъ непрерывна и* $|f^p(x)| < 2^p.(2^p+1).S$. *Въ случаѣ, когда, всѣ* u_n *содержатъ только косинусы, или только синусы, то* $|f^{(p)}(x)| \leq (2^p+1).S$.

Эта теорема, доказывается совершенно такъ же, какъ и теорема (11), и подобно ей mutatis mutandis получаются и другія эквивалентныя теоремы, если многочлены замѣняются тригонометрическими суммами.

18. Теорема. *Если внутри отрѣзка* $(-1, +1)$ *есть хоть одна точка, гдѣ p-ая производная* $f^{(p)}(x)$ *нѣкоторой функціи* $f(x)$ *не непрерывна, и наилучшее приближеніе* E_{n-1} *функціи* $f(x)$ *на этомъ отрѣзкѣ при помощи многочлена степени* $n-1$ *равно* $\frac{A_n}{n^p}$, *то рядъ* $\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots \frac{A_n}{n} + \dots$ *расходящійся. Наоборотъ, каковы бы ни были данныя положительныя числа* $A'_1, A'_2, \dots A'_n, \dots$, *удовлетворяющія условію* $\frac{A'_n}{n^p} \geq \frac{A'_{n+1}}{(n+1)^p}$, *если рядъ* $\Sigma' = A'_1 + \dots + \frac{A'_n}{n} + \dots$ *расходящійся, то можно построить функцію* $f(x)$, *которой p-ая производная* $f^{(p)}(x)$ *не непрерывна внутри отрѣзка, при чемъ для всякаго n наилучшее приближеніе* $E_{n-1} < \frac{A'_n}{n^p}$. (Аналогичная теорема для тригонометрическихъ суммъ).

Первая часть теоремы непосредственно вытекаетъ изъ формулировки данной въ § 15 теоремѣ (14), такъ какъ, еслибъ рядъ Σ сходился, то $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна и конечна внутри отрѣзка $(-1, +1)$.

Допустимъ далѣе, что рядъ $\Sigma' = A'_1 + \dots + \frac{A'_n}{n} + \dots$ расходящійся и разсмотримъ два случая. Пусть во первыхъ, начиная отъ нѣкотораго n_1, всѣ $A'_n \geq 1$. Въ такомъ случаѣ можно выбрать (см. § 45) численный коэффиціентъ a такъ, чтобъ функція $\varphi(x) = a|x|^p$ удовлетворяла требованію теоремы: а именно, при $n \leq n_1$, $E_{n-1} < a < \frac{A_n}{n^p}$; и при $n > n_1$ $E_{n-1} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{A_n}{n^p}$.

Во второмъ случаѣ, среди чиселъ A'_{4m+1} есть безчисленное множество удовлетворяющихъ условію $A'_{4m+1} < 1 + \varepsilon$, какъ бы малъ ни было ε. Пусть, для опредѣленности, p будетъ нечетно, и построимъ функцію

$$f(x)=\frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{A'_{4m+1}}{(4m-3)^p}-\frac{A'_{4m+5}}{(4m+1)^p}\right]\cos(4m+1)x=\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n(x). \quad (17)$$

Такимъ образомъ тригонометрическая сумма (n_1-1)-го порядка $\sum_{n=1}^{n=n_1-1}u_n(x)$, при $4m-2\leq n_1<4m+2$, удовлетворяетъ неравенству

$$\left|f(x)-\sum_{n=1}^{n=n_1-1}u_n(x)\right|\leq\frac{A'_{4m+1}}{(4m+1)^p}\leq\frac{A'_{n_1}}{n_1{}^p}$$

Слѣдовательно, *тригонометрическое* приближеніе функціи $f(x)$ (отъ котораго мы затѣмъ легко перейдемъ къ многочленамъ) удовлетворяетъ условію теоремы. Поэтому достаточно будетъ показать, что p-ая производная $f^{(p)}(x)$ въ нѣкоторой точкѣ, а именно въ $x=\frac{\pi}{2}$, безгранично возрастаетъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что всѣ коэффиціенты въ рядѣ (17) положительны, дифференцируемъ его почленно; получимъ

$$\pm\frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[A'_{4m+1}\left(1+\frac{4}{4m-3}\right)^p-A'_{4m+5}\right]\sin(4m+1)x,$$

и полагая $x=\frac{\pi}{2}$, находимъ безконечно-возрастающую сумму положительныхъ членовъ

$$\frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}(A'_{4m+1}-A'_{4m+5})+\left(\frac{4p}{4m-3}+\ldots\right)A'_{4m+1};$$

но этого не могло бы быть, еслибъ въ разсматриваемой точкѣ $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна, ибо въ такомъ случаѣ былъ бы примѣнимъ способъ суммированія тригонометрическихъ рядовъ Фейера [1]), который далъ бы $f^{(p)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\infty$; слѣдовательно, при $x=\frac{\pi}{2}$, $f^{(p)}(x)$ не непрерывна. Для того, чтобъ распространить полученный выводъ на многочлены, полагаемъ $z=\cos x$; тогда $f(x)=\varphi(z)$, и приближеніе E_{n-1} функціи $\varphi(z)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ условію теоремы. Но ясно, что точкѣ $x=\frac{\pi}{2}$, соотвѣтствуетъ $z=0$, гдѣ $\varphi^{(p)}(z)$ не можетъ также быть непрерывна.

---

[1]) Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques.

19. Добавленіе къ предшествующей теоремѣ. Методъ, которымъ мы пользуемся въ этой главѣ, не можетъ дать никакихъ указаній относительно верхней границы E_n. Поэтому для полноты картины намъ необходимо упомянуть о нѣкоторыхъ результатахъ, которые будутъ доказаны лишь въ третьей части. А именно, если $f(x)$ *имѣетъ конечную производную p-го порядка, на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *то можно указать опредѣленное число k такъ, чтобы, при всякомъ $n > 0$,*

$$E_n < \frac{k \log (n+1)}{(n+1)^p};$$

если же эта p-ая производная удовлетворяетъ условію Липшица степени α, то, при всякомъ $n > 0$,

$$E_n < \frac{k \log (n+1)}{(n+1)^{p+\alpha}} < \frac{k_1}{(n+1)^{p+\alpha_1}},$$

гдѣ $\alpha_1 (\alpha_1 < \alpha)$ положительное число, сколь угодно близкое къ α.

Отсюда слѣдуетъ, что *если p-ая производная непрерывна и кромѣ того удовлетворяетъ какому-нибудь условію Липшица, то рядъ*

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots + \frac{A_n}{n} + \dots < \frac{k \log 2}{2^{1+\alpha}} + \dots + \frac{k \log n}{n^{1+\alpha}} \dots$$

сходящійся.

Напротивъ, если p-ая производная только непрерывна, то первый изъ упомянутыхъ результатовъ даетъ только [1])

$$\Sigma < \frac{k \log 2}{2} + \dots + \frac{k \log n}{n} \dots;$$

и не даетъ такимъ образомъ права заключать о сходимости ряда Σ.

[1]) Изъ работы Jackson'a, упомянутой въ началѣ, вытекаетъ, что

$$E_n < \frac{k}{(n+1)^p}, \quad \text{т. е.} \quad \Sigma < \frac{k}{2} + \dots + \frac{k}{n} + \dots;$$

и понятно, что въ случаѣ *непрерывности* p-ой производной можно даже показать, что

$$E_n < \frac{k_{n+1}}{(n+1)^p},$$

гдѣ k_n стремится къ нулю, но и этого недостаточно для сходимости ряда Σ.

20. Примѣръ функціи, имѣющей непрерывную производную при расходящемся рядѣ Σ. Дѣйствительно, можно указать примѣръ функціи, для которой рядъ Σ расходится, хотя производная вездѣ непрерывна. Этимъ свойствомъ обладаетъ, напримѣръ, функція [1])

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_n \cos nx}{n^2},$$

если выбрать соотвѣтствующимъ образомъ $\alpha_1>\alpha_2>\ldots\alpha_n>\ldots$ причемъ $\lim\limits_{n=\infty}\alpha_n=0$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя, получимъ равномѣрно сходящійся рядъ

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_n \sin nx}{n},$$

ибо можно указать опредѣленную постоянную A такъ, чтобъ, при всякомъ n',

$$\left|\sum_{n=n'}^{n=\infty}\frac{\sin nx}{n}\right|<A.$$

Но съ другой стороны,

$$\sum_{n=n'}^{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n^2}=\frac{\alpha_{n'}}{n'^2}+\frac{\alpha_{n'+1}}{(n'+1)^2}+\ldots<\frac{\alpha_{2n'}}{4n'}+\frac{\alpha_{4n'}}{8n'}+\ldots<\frac{\alpha_{n'}}{2n'},$$

если только $\alpha_{\;n}\geq\frac{\alpha_n}{2}$. Отсюда можно заключить, какъ будетъ доказано въ 3-й части, что

$$E_n[f(x)]<\frac{k\alpha_{n+1}}{(n+1)\log(n+1)},$$

Поэтому, если числа α_n убываютъ достаточно медленно, напримѣръ $\alpha_n=\frac{1}{\log\log(n+1)}$, то рядъ Σ будетъ расходящимся.

Изъ предыдущаго видно, что вообще функціи, имѣющія непрерывную производную, допускаютъ лучшее приближеніе при помощи многочленовъ данной степени, чѣмъ функція, не имѣющія производной; но тѣмъ не менѣе есть среди функцій, имѣющихъ непрерывныя производ-

---

[1]) Подобно предыдущему отъ тригонометрическаго ряда къ строкѣ многочленовъ можно перейти съ помощью подстановки $t=\cos x$.

ныя, особый классъ функцій $f(x)$, для которыхъ, при всякомъ n, $E_n[f(x)] > E_n[\varphi(x)]$, гдѣ $\varphi(x)$ нѣкоторая функція, не имѣющая непрерывной производной.

21. Примѣненіе къ функціи $|x|$. Производная функціи $|x|$ имѣетъ точку разрыва $x = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots + \frac{A_n}{n} \ldots = E_0 + E_1 + \ldots + E_n + \ldots$$

расходящійся, обозначая черезъ $E_n = \frac{A_{n+1}}{n+1}$ наилучшее приближеніе $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n. Никакихъ заключеній о каждомъ опредѣленномъ E_n отсюда нельзя вывести. Единственное, что можно сказать, что при всякомъ ε будетъ безчисленное множество значеній n, для которыхъ

$$E_{n-1} > \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad E_{n-1} > \frac{1}{n\log n\,(\log\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

Напротивъ, одного факта, что производная $|x|$ не непрерывна, *недостаточно* для того, чтобъ утверждать, что будетъ безчисленное множество значеній, для которыхъ $E_{n-1} > \frac{1}{n\log n}$, такъ какъ мы видѣли, что есть функціи, не обладающія непрерывной производной, для которыхъ всѣ E_{n-1} менѣе членовъ любого расходящагося ряда.

22. Теорема. *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобъ функція $f(x)$ на всемъ отрѣзкѣ $(-1, +1)$ имѣла конечныя и непрерывныя производныя всѣхъ порядковъ заключается въ томъ, чтобъ при всякомъ p, существовало число a_p, независящее отъ n, обладающее свойствомъ, что для всѣхъ n*

$$E_n . n^p < a_p .$$

Въ самомъ дѣлѣ, условіе достаточно, такъ какъ изъ примѣчанія къ теоремѣ (12) вытекаетъ существованіе конечной производной k-аго порядка, на всемъ отрѣзкѣ, если $k < \frac{p}{2}$. Съ другой стороны, условіе необходимо вслѣдствіе § 19.

23. Примѣръ функціи, для которой E_n убываетъ неправильно.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если условіе $E_n < \frac{\alpha_p}{n^p}$ соблюдается для всякаго n, то функція имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ. Нельзя того же сказать, если неравенство это соблюдено, хотя и для безчисленнаго множества, но не для всѣхъ значеній n.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 2^{m!} x}{2^{m!}}. \tag{18}$$

Полагая $n = 2^{m!} > 2^{p!}$, находимъ

$$E_n \leqq \left[\frac{1}{2^{(m+1)!}} + \frac{1}{2^{(m+2)!}} + \ldots\right] < \frac{2}{2^{(m+1)!}} = \frac{2}{(2^{m!})^{m+1}} = \frac{2}{n^{m+1}} \leqq \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n^p}.$$

Однако легко убѣдиться, что функція $f(x)$ не имѣетъ производной.

24. Обобщеніе условій Липшица. Предыдущій примѣръ естественно наводитъ на мысль о выясненіи дифференціальной природы функцій, которыя не для всѣхъ, но для безчисленнаго множества значеній n, допускаютъ приближеніе того же порядка, что и функціи, обладающія производными. Какъ мы увидимъ, эти функціи обладаютъ свойствами, аналогичными условіямъ Липшица.

Пусть $f(x)$ будетъ нѣкоторая непрерывная на отрѣзкѣ (AB) функція. Обозначимъ черезъ $\delta_1(\varepsilon)$ максимумъ колебанія функціи $f(x)$ въ любомъ промежуткѣ длины ε на отрѣзкѣ, или другими словами, максимумъ разности $|f(x+h) - f(x)|$ при $|h| \leqq \varepsilon$. Функція $\delta_1(\varepsilon)$ будетъ, очевидно, непрерывной, не отрицательной и монотонной (т. е. не убывающей, такъ какъ $\delta_1(0) = 0$). Обыкновенное условіе Липшица степени s выражаетъ, что существуетъ такое опредѣленное число k, что при всякомъ ε

$$\delta_1(\varepsilon) < k\varepsilon^s. \tag{19}$$

Мы скажемъ, что функція $f(x)$ удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени s, если существуетъ безчисленное множество значеній ε, для которыхъ неравенство (19) соблюдено.

Точно также вмѣсто максимума первой разности $|f(x+h) - f(x)|$, при $|h| \leqq \varepsilon$, можно разсматривать максимумы послѣдовательныхъ разностей: $\delta_2(\varepsilon) =$ макс. $|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$, $\delta_3(\varepsilon) =$ макс. $|f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)|$ и т. д. при $|h| \leqq \varepsilon$.

Если для безчисленнаго множества значеній ε имѣетъ мѣсто неравенство

$$\delta_i(\varepsilon) < k\varepsilon^s, \tag{19^{bis}}$$

то мы будемъ говорить, что функція $f(x)$ удовлетворяетъ на отрѣзкѣ AB обобщенному условію Липшица i-го вида степени s. Легко убѣдиться, что, если $\delta_i(\varepsilon) > 0$, то $s \leq i$. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія конечной производной i-го порядка на отрѣзкѣ AB, условіе (19^{bis}) соблюдается для всѣхъ ε при $s = i$.

25. Теорема. *Если существуетъ безчисленное множество значеній n, для которыхъ наилучшее приближеніе*[1] *E_n на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ неравенству $E_n < \frac{A}{n^p}$, то функція $f(x)$ на всякомъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$ удовлетворяетъ обобщеннымъ условіямъ Липшица i-го вида степени $s_i = \frac{ip}{i+p}$.*

Разсмотримъ сначала функцію $\delta_1(\varepsilon)$. Обозначая черезъ P_n приближенный многочленъ степени n, удовлетворяющій неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{n^p}, \tag{20}$$

будемъ, очевидно, имѣть для безчисленнаго множества значеній n,

$$|P_n(x)| < M + \frac{A}{n^p} < 2M,$$

гдѣ M максимумъ $|f(x)|$.

Въ такомъ случаѣ на всякомъ опредѣленномъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$

$$|P_n'(x)| < RMn,$$

гдѣ R нѣкоторый численный множитель (§ 3).

Поэтому

$$|P_n(x_1) - P_n(x_2)| < RMn\varepsilon,$$

если $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$. Но значенія x_1 и x_2 можно выбрать такъ, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \delta_1(\varepsilon).$$

Слѣдовательно,

$$|f(x_1) - P_n(x_1) + P_n(x_2) - f(x_2)| > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon.$$

[1] При помощи многочленовъ степени n. Та же теорема (см. § 17) остается въ силѣ и для тригонометрическихъ суммъ.

Сопоставляя это неравенство съ неравенствомъ (20), находимъ

$$\frac{2A}{n^p} > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon,$$

или

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + RMn\varepsilon. \qquad (21)$$

Положимъ въ этомъ неравенствѣ $\varepsilon = \frac{1}{n^{1+p}}$. Получимъ

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + \frac{RM}{n^p} = (2A + RM)\ \varepsilon^{\frac{p}{1+p}}.$$

Такимъ образомъ, для $i = 1$, теорема заказана.

Достаточно будетъ разсмотрѣть еще случай $i = 2$, чтобъ убѣдиться, что тотъ же пріемъ доказательства примѣнимъ для всякаго i.

На основаніи § 11 имѣемъ $|P''_n(x)| < R_1Mn^2$, гдѣ R_1 численный коэффиціентъ, зависящій только отъ отрѣзка AB. Поэтому, при $|h| \leqq \varepsilon$

$$|P_n(x+2h) - 2P_n(x+h) + P_n(x)| < 2R_1Mn^2\varepsilon^2;$$

но, выбирая x соотвѣтствующимъ образомъ, имѣемъ

$$|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| = \delta_2(\varepsilon).$$

Откуда

$$|f(x+2h) - P_n(x+2h) - 2(f(p+h) - P_n(x+h)) +$$
$$+ f(x) - P_n(x)| > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1Mn^2\varepsilon^2.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{4A}{n^p} > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1Mn^2\varepsilon^2,$$

или

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + 2R_1Mn^2\varepsilon^2. \qquad (22)$$

Полагая въ неравенствѣ (22)

$$\varepsilon = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}},$$

получимъ

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + \frac{2R_1M}{n^p} = (4A + 2R_1M)\,\varepsilon^{\frac{2p}{2+p}}$$

Такимъ образомъ теорема доказана также для $i = 2$, и ясно, что тоже разсужденіе примѣнимо для всякаго i.

26. Приложенія предшествующей теоремы. Функція, разсмотрѣнная нами въ § 23, обладала свойствомъ, что при всякомъ p есть безчисленное множество значеній n, для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$. Такимъ образомъ вслѣдствіе только что доказанной теоремы заключаемъ, что указанная функція удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица вида i любой степени $s < i$.

Не останавливаясь на болѣе детальномъ изученіи этихъ своеобразныхъ функцій, примѣнимъ предыдущую теорему къ опредѣленію низшаго предѣла $E_n|x|$. Для этого замѣтимъ, что ни при какомъ i функція $|x|$ не удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени выше первой. Въ самомъ дѣлѣ, при $x = -h$,

$$|x + nh| - n|x + (n-1)h| + \ldots + (-1)^n |x| = (-1)^n . 2h;$$

такъ что $\delta_i(\varepsilon) \geq 2\varepsilon$.

Слѣдовательно, если есть *безчисленное множество* значеній n, для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$, то показатель p долженъ обладать свойствомъ, что, при всякомъ i,

$$s = \frac{ip}{i+p} \leq 1,$$

откуда

$$p \leq \frac{i}{i-1}.$$

Такимъ образомъ *p не можетъ быть болѣе единицы.*

27. Условіе Дини и Липшица. Условіемъ Дини и Липшица называютъ свойство, которымъ обладаютъ нѣкоторыя непрерывныя функціи, заключающееся въ томъ, что произведеніе

$$\delta_1(\varepsilon) . \log \varepsilon$$

стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε. Мы будемъ говорить, что функція удовлетворяетъ обобщенному условію Дини и Липшица, если возможно выбрать безчисленное множество значеній ε такимъ образомъ, чтобъ указанное произведеніе $\delta_1(\varepsilon) . \log\varepsilon$ стремилось къ нулю вмѣстѣ съ ε. Принявъ эти опредѣленія, докажемъ, что *функція, для которой $E_n . \log n$*

стремится къ нулю для безчисленнаго множества значеній n, удовлетворяетъ обобщенному условію Дини-Липшица; если $E_n.\log n$ стремится къ нулю при всѣхъ значеніяхъ n, то функція удовлетворяетъ обыкновенному условію Дини и Липшица.

Въ самомъ дѣлѣ, повторяя разсужденіе § 25, приходимъ немедленно къ обобщенію неравенства (21)

$$\delta_1(\varepsilon) < 2E_n + kn\varepsilon, \tag{21$^{\text{bis}}$}$$

гдѣ k постоянная (независимая отъ n). Примѣняя это неравенство къ настоящему случаю, когда $E_n \log n = \beta_n$ стремится къ нулю, и полагая

$$\varepsilon = \frac{\beta_n}{n \log n},$$

получимъ

$$\log n \,.\, \delta_1(\varepsilon) < \beta_n(2+k);$$

но

$$|\log \varepsilon| < 2 \log n;$$

слѣдовательно

$$|\log \varepsilon| \,.\, \delta_1(\varepsilon) < \beta_n(4+2k), \tag{23}$$

для безчисленнаго множества значеній n. Такимъ образомъ, для безчисленнаго множества значеній ε, произведеніе $\log\varepsilon \,.\, \delta_1(\varepsilon)$ стремится къ нулю. Если же неравенство (23) соблюдается для всякаго цѣлаго n, то ясно, что $\log\varepsilon \,.\, \delta_1(\varepsilon)$ будетъ всегда стремиться къ нулю вмѣстѣ съ ε. Что и требовалось доказать.

28. Теорема Лебега. Въ своей большой работѣ [1] „Sur les intégrales singulières“ Лебегъ доказываетъ слѣдующую теорему: *если разсматривается совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцій $f(x)$, для которыхъ $|f(x)| \leq M$, то при всякомъ n, верхнимъ предѣломъ $E_n(f(x))$ является M* (т. е. среди функцій $f(x)$, есть такія для которыхъ $E_n(f(x)) > M - \alpha$, какъ бы мало ни было α и, кромѣ того, для всѣхъ функцій $E_n(f) \leq M$). При помощи неравенства (21^{bis}) эту теорему чрезвычайно легко доказать. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы мало ни было $\varepsilon = \frac{\alpha}{kn}$, среди разсматриваемыхъ функцій можно выбрать такую, что $\delta_1(\varepsilon) = 2M$. Поэтому, вслѣдствіе неравенства (21^{bis}), для этой функціи

$$E_n > M - \alpha, \text{ ч. и. т. д.}$$

[1] Ann. de Toulouse. 1909.

само собой понятно, что для всѣхъ функцій разсматриваемой совокупности $E_n[f(x)] \leq M$).

Однако теорема Лебега оставляетъ открытымъ интересный вопросъ: возможно ли указать такой рядъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, имѣющихъ предѣломъ 0, чтобъ для всякой данной непрерывной функціи можно было указать независимое отъ n число R достаточно большое, чтобъ $E_n < R\alpha_n$.

На основаніи теоремы Лебега можно лишь утверждать, что еслибъ рядъ чиселъ α_n существовалъ, то, для всей совокупности непрерывныхъ функцій $f(x)$, не превышающихъ M по абсолютному значенію, множитель R не имѣлъ бы верхняго предѣла. Дѣйствительно, легко убѣдиться, что теорема Лебега остается справедливой, если совокупность непрерывныхъ функцій замѣнить одними лишь многочленами; а между тѣмъ, каковы бы ни были числа α_n, напримѣръ $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$, для всякаго опредѣленнаго многочлена возможно, конечно, указать число R такъ, чтобъ $E_n < R\alpha_n$.

Неравенство (21^{bis}) даетъ немедленно *отрицательный* отвѣтъ на поставленный вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ, если для нѣкоторой функціи $E_n < R\alpha_n$, то $\delta_1(\varepsilon) < 2R\alpha_n + kn\varepsilon$. Полагая $\alpha_n > \frac{1}{n}$ (что мы вправѣ сдѣлать не нарушая общности), беремъ $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$; въ такомъ случаѣ, $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) < 2R\alpha_n + \frac{k}{n} < (2R+k)\alpha_n$. Но такому неравенству при всякомъ n не можетъ удовлетворить, напримѣръ, ни одна непрерывная функція $f(x)$, которая при $x = \frac{1}{n^2}$ обращается въ $\sqrt{\alpha_n}$, такъ какъ для этой функціи $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq \sqrt{\alpha_n}$.

29. Теорема. *Если для всякаго n наилучшее приближеніе E_n функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ неравенству $E_n < M\varrho^n$, то функція $f(x)$ голоморфна внутри эллипса, фокусами котораго служатъ точки $-1, +1$, а полусумма осей равна $\frac{1}{\varrho}$.*

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $P_n(x)$ многочленъ степени n, для котораго

$$|f(x) - P_n(x)| < M\varrho^n,$$

можемъ написать

$$f(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \ldots; \quad (24)$$

при этомъ

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < 2M\varrho^{n-1}$$

на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Поэтому во всякой точкѣ H эллипса, котораго сумма полуосей равна $\frac{1}{\varrho_1} < \frac{1}{\varrho}$, а фокусы находятся въ точкахъ $(-1, +1)$, имѣемъ (§ 7)

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < \frac{2M}{\varrho_1} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{n-1}.$$

Слѣдовательно, рядъ (24) равномѣрно сходится во всякой области внутри эллипса, котораго сумма полуосей равна $\frac{1}{\varrho}$, а потому функція $f(x)$ голоморфна.

(Обратная теорема будетъ доказана въ 3-й части).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Приближенное вычисленіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся въ данномъ промежуткѣ отъ данной функціи.

Глава III.

Общій методъ.

30. Введеніе. Идея метода приближеннаго вычисленія многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи, которому посвящена эта глава, состоитъ въ томъ, чтобъ соотвѣтствующимъ образомъ использовать уже извѣстные многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нѣкоторыхъ другихъ данныхъ функцій. Иногда вмѣсто другихъ функцій цѣлесообразно будетъ вводить аналогичныя многочленамъ выраженія, наименѣе уклоняющіяся отъ той же самой функціи. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ непрерывный переходъ отъ извѣстнаго къ неизвѣстному совершается посредствомъ аналитическаго продолженія; при этомъ, какъ для практическихъ примѣненій, такъ и для теоретическихъ выводовъ, весьма важно выбрать исходный пунктъ такимъ образомъ, чтобъ первыя же приближенія обладали уже значительной точностью.

Напомнимъ сначала классическіе результаты, вытекающіе изъ изслѣдованій Чебышева. (Строгое доказательство этихъ результатовъ читатель найдетъ, напримѣръ, въ книгѣ Borel «Leçons sur les fonctions de variables réelles, p. 88»).

a. Существуетъ одинъ и только одинъ многочленъ P_n степени не выше n, наименѣе уклоняющійся въ промежуткѣ (AB) отъ данной непрерывной функціи $f(x)$.

b. Изъ всѣхъ многочленовъ степени не выше n только многочленъ $P_n(x)$ обладаетъ свойствомъ, что разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигаетъ не менѣе, чѣмъ $(n+2)$ разъ своего максимума въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

Изъ послѣдняго предложенія вытекаетъ, что еслибъ разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигала бы своего максимума болѣе, чѣмъ $(n+2)$ раза, а именно $n+2+k$ разъ, то многочленъ $P_n(x)$ былъ бы въ тоже время единственнымъ наименѣе уклоняющимся отъ функціи $f(x)$ среди всѣхъ многочленовъ степени не выше $n+k$. Такимъ образомъ задача опредѣленія многочленовъ $P_n(x)$, по существу, нисколько не суживается, если ограничимся только тѣми значеніями n, для которыхъ разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигаетъ своего максимума въ $(n+2)$ точкахъ.

31. Обобщенія. Разсмотримъ рядъ степеней $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$, гдѣ $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, и составимъ суммы $A_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}$ съ произвольными коэффиціентами $A_0, \ldots A_n$. Если сумма

$$R_n(x) = B_0 x^{\alpha_0} + \ldots B_n x^{\alpha_n},$$

изъ всѣхъ суммъ указаннаго вида наименѣе уклоняется отъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (AB), то $R_n(x)$ называется суммой вида $\sum\limits_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ наименѣе уклоняющейся отъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (AB). Относительно отрѣзка (AB) необходимо ввести ограниченіе: а именно, на всемъ отрѣзкѣ $x \geq 0$. Благодаря этому ограниченію числа x^{α_i} будутъ всегда имѣть вполнѣ опредѣленное ариѳметическое значеніе. Разсужденіями, совершенно подобными тѣмъ, которыя читатель найдетъ въ выше упомянутой книгѣ Borel'я для случая, когда $\alpha_i = i$, можно доказать существованіе суммы $R_n(x)$, наименѣе уклоняющейся отъ данной непрерывной функціи $f(x)$, и въ общемъ случаѣ. Для доказательства же того, что эта сумма единственная, намъ необходимо доказать предварительно слѣдующую лемму, являющуюся обобщеніемъ теоремы Декарта.

32. Лемма. *Число положительныхъ корней уравненія*

$$Q(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0, \tag{25}$$

гдѣ $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_n$, *не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда* $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Въ случаѣ когда числа α_i цѣлыя, высказанное предложеніе является прямымъ слѣдствіемъ изъ извѣстной теоремы Декарта. Точно также случай, когда числа α_i раціональныя, посредствомъ подстановки $x^{\frac{1}{p}} = y$ приводится къ предшествующему.

Положимъ далѣе, что числа α_i какія угодно, но, что всѣ положительные корни уравненія (25) различны между собой. Если безконечно мало измѣнить показатели уравненія, то безконечно мало измѣнятся и корни; поэтому каждому положительному корню даннаго уравненія будетъ соотвѣтствовать одинъ положительный корень измѣненнаго уравненія, и наоборотъ, ибо комплексные корни вещественнаго уравненія всегда попарно сопряженные. Такимъ образомъ число положительныхъ корней даннаго уравненія то же, что измѣненнаго, но въ этомъ послѣднемъ всегда можно предположить показатели раціональными. Слѣдовательно, число простыхъ положительныхъ корней уравненія (25) не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Тѣмъ же способомъ убѣждаемся, что число различныхъ положительныхъ корней нечетной кратности не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Но намъ остается еще показать, что число корней взятыхъ съ ихъ степенью кратности также не превышаетъ упомянутаго числа. Для этого составляемъ уравненіе

$$\frac{d}{dx}[x^{1-\alpha_0}Q(x)] = 0, \qquad (25^{bis})$$

и замѣчаемъ, что каждый кратный корень уравненія (25) является въ тоже время корнемъ уравненія (25^{bis}) со степенью кратности на одну единицу меньшею; кромѣ этихъ корней, уравненіе (25^{bis}) имѣетъ еще не менѣе различныхъ положительныхъ корней нечетной кратности, чѣмъ уравненіе (25). Такимъ образомъ число корней уравненія (25^{bis}) взятыхъ съ ихъ степенью кратности не меньше числа корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности; число же различныхъ корней уравненія (25^{bis}) нечетной кратности не менѣе числа всѣхъ различныхъ корней нечетной кратности уравненія (25), увеличеннаго на число различныхъ двойныхъ корней послѣдняго уравненія. Изъ этого слѣдуетъ, что если мы поступимъ съ уравненіемъ (25^{bis}), какъ съ уравненіемъ (25) и т. д., то мы прійдемъ наконецъ къ уравненію, число различныхъ корней котораго нечетной кратности будетъ не менѣе числа корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности. Но это послѣднее уравненіе будетъ того же вида,

$$Q_1(x) = b_0 + b_1 x^{\beta_1} + \ldots + b_n x^{\beta_n} = 0 \qquad (25^{ter})$$

что и уравненіе (25), при чемъ $b_i . a_i > 0$, такъ что число перемѣнъ знака въ рядѣ $b_0, b_1 \ldots b_n$ то же, что и въ рядѣ $a_0, a_1 \ldots a_n$. Поэтому число различныхъ корней нечетной кратности уравненія (25^{ter}) не превышаетъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ $a_0, a_1 \ldots a_n$; тѣмъ болѣе и общее число положительныхъ корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1 \ldots a_n$.

Слѣдствіе. *Число положительныхъ корней уравненія (25) не превышаетъ n.*

33. Теорема. *Существуетъ только одна сумма степеней*

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_n x^{\alpha_n}$$

наименѣе уклоняющая въ промежуткѣ AB отъ функціи $f(x)$. При этомъ разность $f(x) - R_n(x)$ достигаетъ не менѣе, чѣмъ $(n+2)$ раза своего наибольшаго абсолютнаго значенія, послѣдовательно мѣняя свой знакъ. Исключеніе можетъ представляться лишь, если это наибольшее значеніе равно $|f(0)|$, при $\alpha_0 > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $x_1, x_2 \ldots x_k$ возрастающій рядъ чиселъ, для которыхъ разность $f(x) - R_n(x)$ достигаетъ послѣдовательно наибольшаго абсолютнаго значенія, мѣняя знакъ, находимъ на основаніи соображеній, которыми мы пользовались нѣсколько разъ въ I-й главѣ (стр. 11), что уравненія

$$\begin{array}{l} b_0 x_1^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_1^{\alpha_n} = f(x_1) - R_n(x_1) = \pm L \\ b_0 x_2^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_2^{\alpha_n} = f(x_2) - R_n(x_2) = \mp L \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 x_k^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_k^{\alpha_n} = f(x_k) - R_n(x_k) = \mp (-1)^k . L \end{array} \qquad (26)$$

должны быть несовмѣстимыми, если $R_n(x)$ представляетъ собой сумму указаннаго вида, наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$ на отрѣзкѣ AB. Но легко убѣдиться, что уравненія (26) были бы совмѣстимы, если бы $k < n+2$, ибо ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\delta_p = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_0} \ldots x_1^{\alpha_p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p+1}^{\alpha_0} \ldots x_{p+1}^{\alpha_p} \end{vmatrix} = a_0 x_{p+1}^{\alpha_0} + \ldots + a_p x_{p+1}^{\alpha_p}$$

не можетъ быть равенъ нулю: это справедливо для $p=0$, но если $\delta_{p-1} \gtrless 0$, то и $\delta_p \gtrless 0$, такъ какъ въ уравненіи

$$a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + a_p x^{\alpha_p} = 0$$

коэффиціентъ $a_p = \delta_{p-1} \gtrless 0$, и поэтому это уравненіе не соблюдено тождественно; но оно имѣетъ p положительныхъ [1]) корней $x_1, \ldots x_p$, и слѣдовательно

[1]) Если $x_1 = 0$, то коэффиціентъ $a_0 = 0$, и потому сумма δ_p, состоящая только изъ p слагаемыхъ, не имѣетъ болѣе $(p-1)$ корня.

$$\delta_p = a_0 x_{p+1}^{\alpha_0} + \ldots + a_p x_{p+1}^{\alpha_p} \gtreqless 0.$$

Такимъ образомъ 2-я часть теоремы доказана. Допустимъ теперь, что кромѣ $R_n(x)$ существуетъ еще сумма $R'_n(x)$ наименѣе уклоняющаяся отъ данной функціи $f(x)$. Въ такомъ случаѣ, въ силу только что доказаннаго, разность

$$Q(x) = R_n(x) - R'_n(x)$$

въ точкахъ $x_1, x_2, \ldots x_{n+2}$ будетъ послѣдовательно мѣнять знакъ или равна нулю.

Поэтому, если $Q(x_i) \gtreqless 0$, $Q(x_{i+1}) \gtreqless 0, \ldots Q(x_{i+k+1}) \gtreqless 0$, то между x_i и x_{i+k+1} по крайней мѣрѣ $k+1$ корней; точно также, если $Q(x_{i+1}) = \ldots = Q(x_{i+k}) = 0$, то число корней (взятыхъ съ ихъ степенью кратности) не менѣе $k+1$, такъ какъ это число не менѣе k, и кромѣ того разность между нимъ и $k+1$ должна быть четной. Отсюда вытекаетъ, что общее число положительныхъ корней уравненія

$$Q(x) = 0$$

не менѣе $(n+1)$, что невозможно на основаніи леммы (32). Такимъ образомъ существуетъ только одна сумма $R_n(x)$, наименѣе уклоняющаяся отъ функціи $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ.

Примѣчаніе. Необходимо помнить, что примѣненіе доказанной теоремы въ случаѣ $a_0 > 0$ и $x \geq 0$ законно лишь, если $f(0) = 0$.

34. Обобщенная теорема de la Vallée Poussin [1]. *Отклоненіе $|f(x) - R_n(x)|$ не можетъ въ промежуткѣ AB оставаться постоянно менѣе наименьшаго изъ значеній $|f(x) - P_n(x)|$ въ $(n+2)$ точкахъ, гдѣ $f(x) - P_n(x)$ послѣдовательно мѣняетъ знакъ, если $P_n(x)$ сумма того же вида, что $R_n(x)$.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ противное. Тогда въ $(n+2)$ точкахъ разность

$$Q(x) = P_n(x) - R_n(x) = (f(x) - R_n(x)) - (f(x) - P_n(x)).$$

послѣдовательно мѣняетъ знакъ, и слѣдовательно, уравненіе $Q(x) = 0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Замѣчаніе. Эта теорема была доказана de la Vallée Poussin въ случаѣ многочленовъ, при чемъ промежутокъ AB тогда можетъ быть какой угодно; очевидно, что данное здѣсь доказательство пригодно и для упомянутаго случая.

---

[1]) *De la Vallée Poussin.* Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle. (Bulletin de l'Académie de Belgique, Décembre 1910).

35. Опредѣленія. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$, гдѣ $|f(x) - R_n(x)|$ достигаетъ наибольшаго значенія, мы будемъ называть *точками отклоненія.*

Слѣдуетъ замѣтить, что расположеніе точекъ отклоненія на отрѣзкѣ AB можетъ быть четырехъ родовъ. А именно: 1-го рода, когда оба конца A и B являются точками отклоненія; 2-го рода, когда только A—точка отклоненія; 3-го рода, когда только B—точка отклоненія; 4-го рода, когда всѣ точки отклоненія находятся внутри отрѣзка AB. Расположеніе 1-го рода является вообще наиболѣе общимъ случаемъ. Однако, если $a_0 > 0$ и $A = 0$ (что большею частью будетъ имѣть мѣсто въ дальнѣйшихъ приложеніяхъ), то расположеніе 1-го рода и 2-го рода будетъ невозможно, такъ какъ вслѣдствіе примѣчанія къ теоремѣ (33) необходимо, чтобъ $f(0) = 0$; въ этомъ случаѣ, обыкновенно представляется расположеніе 3-го рода.

36. Основная теорема А. *Если сумма* $P(x, \lambda) = \sum\limits_0^n a_n x^{\alpha_n}$, *наименье уклоняющаяся на отрѣзкѣ* AB *отъ голоморфной функціи* $\lambda f(x) + (1 - \lambda)\varphi(x)$, *имѣетъ* $(n+2)$ *точки отклоненія одного и того же рода при всякомъ* $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$, *то коэффиціенты суммы* $P(x, \lambda)$ *и абсциссы точекъ отклоненія такъ же, какъ и наименьшее отклоненіе, являются голоморфными функціями параметра* λ, *при условіи, что во внутреннихъ точкахъ отклоненія* $F''_{x^2} \gtrless 0$, *полагая*

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda).$$

Достаточно будетъ разсмотрѣть, напримѣръ, случай 1-го рода расположенія точекъ отклоненія; другими словами, предположимъ, что, при всякомъ λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, концы отрѣзка A и B являются точками отклоненія. Въ такомъ случаѣ для опредѣленія $P(x, \lambda)$ мы будемъ имѣть $2n + 2$ уравненія: [1])

$$\begin{gathered} F'_x(x_i, \lambda) = \lambda f'(x_i) + (1 - \lambda)\varphi'(x_i) - P'(x_i, \lambda) = 0, \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)} \\ [F(x_i, \lambda)]^2 = L^2, \\ [F(A, \lambda)]^2 = L^2, \\ [F(B, \lambda)]^2 = L^2 \end{gathered} \tag{27}$$

съ $(2n + 2)$ неизвѣстными: внутренними точками отклоненія $x_1, x_2, \ldots x_n$, (расположенными въ возрастающемъ порядкѣ), коэффиціентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, и отклоненіемъ L.

---

[1]) Если $\alpha_i = i$, то промежутокъ AB произволенъ; въ общемъ же случаѣ предполагается, что $B > A \geqq 0$.

При всякомъ опредѣленномъ значеніи $\lambda = \lambda_0$, система уравненій (27) имѣетъ одну вполнѣ опредѣленную систему вещественныхъ рѣшеній, соотвѣтствующую единственной суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $\lambda f(x) + (1 - \lambda) q(x)$. Поэтому, если функціональный опредѣлитель уравненій (27) относительно неизвѣстныхъ отличенъ отъ нуля, то всѣ неизвѣстныя будутъ аналитическими функціями параметра λ. Такимъ образомъ для доказательства теоремы достаточно будетъ показать, что выше упомянутый функціональный опредѣлитель не равенъ нулю. Но этотъ опредѣлитель Δ равенъ

$$\pm(2L)^{n+2}\cdot\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n+1}\qquad\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n+1} \\ \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0\ldots 0 & A^{\alpha_0} & A^{\alpha_1}\ldots A^{\alpha_n} \\ -1 & 0 & 0\ldots 0 & x_1^{\alpha_0} & x_1^{\alpha_1}\ldots x_1^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n+1} & 0 & 0\ldots 0 & B^{\alpha_0} & B^{\alpha_1}\ldots B^{\alpha_n} \\ 0 & F''_{x_1^2} & 0\ldots 0 & 0 & 0\ \ldots 0 \\ 0 & 0 & F''_{x_2^2}\ldots 0 & 0 & 0\ \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots F''_{x_n^2} & 0 & 0\ \ldots 0 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \pm F''_{x_1^2}.F''_{x_2^2}\ldots F''_{x_n^2}[\Delta_A + \Delta_x + \ldots \Delta_B].(2L)^{n+2},$$

гдѣ

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1}\ldots x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_0}\ldots\ldots x_2^{\alpha_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B^{\alpha_0}\ldots B^{\alpha_n} \end{vmatrix} > 0,\quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} A^{\alpha_0}\ldots A^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_0}\ldots x_2^{\alpha_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B^{\alpha_0}\ldots B^{\alpha_n} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, $\Delta_A + \Delta_{x_1} + \ldots + \Delta_B > 0$, а потому $\Delta \gtrless 0$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Можно замѣтить, что при доказательствѣ никакой роли не играло то обстоятельство, что параметръ λ входитъ въ видѣ $\lambda f(x) + (1 - \lambda) q(x)$; все разсужденіе остается въ силѣ, если разсматриваемая функція голоморфна относительно λ. Это замѣчаніе приводитъ насъ къ другой полезной для примѣненій формулировкѣ основной теоремы.

37. Основная теорема В. *Если сумма* $P(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$, *наименѣе уклоняющаяся на отрѣзкѣ* AB *отъ функціи* $f(x) + (\lambda - 1)Q(x)$, *имѣетъ* $(n + 2)$ *точки отклоненія одного и того же рода, при всякомъ* λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$, *а* $F''_{x^2} = f''_{x^2} + (\lambda - 1)Q''_{x^2} - P''_{x^2} \gtrless 0$ *во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія, то, полагая, что* $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$ *есть сумма, наименѣе уклоняющаяся отъ* $f(x)$ *на отрѣзкѣ* AB, *коэффиціенты* $P(x, \lambda)$ *такъ же, какъ абсциссы точекъ отклоненія и отклоненіе, суть голоморфныя функціи* λ, *при чемъ* $P(x, 0) = 0$.

38. Примѣненіе основныхъ теоремъ. Теоремой A слѣдуетъ пользоваться, если хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$, наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму того же вида наименѣе уклоняющуюся отъ другой данной функціи $\varphi(x)$. Теорему B примѣняютъ, когда хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму $\sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$, составленную изъ другихъ степеней x, наименѣе уклоняющуюся отъ той же функціи.

Не трудно понять общій пріемъ пользованія упомянутыми теоремами, къ изложенію котораго мы сейчасъ перейдемъ, обративъ особое вниманіе на вычисленіе функціи $L(\lambda)$, представляющей наименьшее отклоненіе для различныхъ значеній параметра λ.

Если данная функція $f(x)$ не аналитическая, то предварительно надо будетъ замѣнить ее аналитической, достаточно мало отличающейся отъ данной въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Такимъ образомъ въ дальнѣйшемъ мы все время предполагаемъ данную функцію $f(x)$ аналитической. Для примѣненія теоремы A выбираемъ нѣкоторую другую аналитическую функцію $\varphi(x)$, для которой наименѣе уклоняющаяся сумма того же вида $P(x) = P(x, 0) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{\alpha_i}$ извѣстна и, кромѣ того, обладающую свойствомъ, что функція $F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda)$ удовлетворяетъ условію, что во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \gtrless 0$, при чемъ родъ расположенія точекъ отклоненія независимъ отъ λ.

Послѣ этого вычисляемъ послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}$ и т. д. для $\lambda = 0$. Многочленъ или сумма степеней $P(x, \lambda)$ разлагается такимъ образомъ въ строку Тэйлора относительно λ, представляющую голоморфную функцію при всѣхъ значеніяхъ $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, значеніе которой $P(x, 1)$, при $\lambda = 1$, равно искомой суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $f(x)$. Если строка Тэйлора имѣетъ радіусъ сходимости меньше единицы, то для вычисленія $P(x, 1)$ можно во всякомъ случаѣ примѣнить способъ суммированія Миттагъ-Леффлера. Послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda} = P_1$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = P_2$ и т. д. при $\lambda = 0$, представляющія собой суммы степеней того же вида, что и $P(x)$, послѣдовательно вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего замѣчаемъ, что въ $n+2$ точкахъ отклоненія x_i, соотвѣтствующихъ $\lambda = 0$, и, по предположенію, извѣстныхъ, имѣемъ

$$\pm L(0) = \varphi(x_i) - P(x_i,\ 0).$$

Затѣмъ, такъ какъ въ этихъ точкахъ, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ или же $\dfrac{dx_i}{d\lambda} = 0$, то

$$\pm \frac{dL(0)}{d\lambda} = \frac{\partial F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda} = f(x_i) - \varphi(x_i) - P_1(x_i), \tag{28}$$

при чемъ знакъ первой части равенства (28) всегда тотъ же для опредѣленнаго i, что и въ предыдущемъ равенствѣ.

Такимъ образомъ для опредѣленія $\dfrac{dL}{d\lambda}$ и $(n+1)$ коэффиціентовъ суммы P_1 имѣемъ $(n+2)$ линейныхъ уравненія съ $(n+2)$ неизвѣстными; при чемъ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0^{\alpha_0} \ldots \ldots x_0^{\alpha_n} \\ -1 & x_1^{\alpha_0} \ldots \ldots x_1^{\alpha_n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n+1} & x_{n+1}^{\alpha_0} \ldots x_{n+1}^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля, такъ что для каждаго изъ неизвѣстныхъ получается всегда одно вполнѣ опредѣленное значеніе.

Для опредѣленія $\dfrac{d^2L}{d\lambda^2}$ и P_2, замѣчаемъ, что, если x_i представляетъ собой неподвижный конецъ отрѣзка (AB), т. е. совпадаетъ съ A или съ B, то

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda^2} = -P_2(x_i); \tag{29}$$

если же точка x_i внутренняя, то

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda^2} + 2\,\frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda \partial x} \cdot \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2;$$

и такъ какъ

$$\frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x \partial \lambda}\, d\lambda + \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x^2}\, dx_i = 0,$$

слѣдовательно,

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - 2\,\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} + \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = -P_2 - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \tag{29bis}$$

(замѣчаніе относительно знаковъ то же, что въ равенствахъ (28)).

Уравненія (29) и (29^{bis}) представляютъ снова систему $(n+2)$ линейныхъ уравненій съ $(n+2)$ неизвѣстными: коэффиціентами многочлена P_2 и $\frac{d^2L}{d\lambda^2}$. При этомъ опредѣлителемъ этихъ уравненій служитъ тотъ же опредѣлитель δ, отличный отъ нуля, что и раньше.

Тѣмъ же способомъ можно вычислить и послѣдующія производныя; это вычисленіе всегда приводится къ рѣшенію системы $(n+2)$ линейныхъ уравненій съ $(n+2)$ неизвѣстными, у которыхъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ для производныхъ всѣхъ порядковъ одни и тѣже.

При примѣненіи теоремы B, вычисленія совершенно аналогичны; въ частности равенства (29) и (29^{bis}) остаются безъ измѣненій.

39. Выводъ двухъ неравенствъ. Въ приложеніяхъ, составляющихъ содержаніе слѣдующей главы мы будемъ ограничиваться первыми двумя членами строки Тэйлора: а именно, за приближенное значеліе искомаго отклоненія $L(1)$ мы будемъ брать $L(0)$ или $L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$. Первымъ изъ этихъ значеній намъ придется пользоваться въ различныхъ частныхъ случаяхъ и въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ будутъ указаны его болѣе или менѣе общія свойства. Напротивъ мы остановимся здѣсь же на второмъ значеніи, удовлетворяющемъ во всѣхъ случаяхъ неравенству

$$L(1) \geqq L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}. \tag{30}$$

Очевидно, что неравенство (30) будетъ доказано, если будетъ обнаружена для всякаго λ справедливость неравенства

$$\frac{d^2L(\lambda)}{d\lambda^2} \geqq 0, \tag{31}$$

ибо

$$L(1)=L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}+\frac{d^2L(\lambda)}{2d\lambda^2},$$

гдѣ $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Но неравенство (31) вытекаетъ изъ формулъ (29) и (29^{bis}), имѣющихъ мѣсто при всякомъ λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, знакъ $+$ въ выше упомянутыхъ формулахъ берется, когда $L=F$; знакъ $-$ берется, когда $L=-F$. Поэтому, еслибъ неравенство (31) было бы неправильно, то во внѣшнихъ точкахъ отклоненія было бы $\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}.F<0$; во внутреннихъ же точкахъ отклоненія, гдѣ

$$F > 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0,$$

мы имѣли бы

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} < 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2 > 0,$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0;$$

а во внутреннихъ точкахъ отклоненія, гдѣ $F < 0$, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, такимъ же образомъ получили бы

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} > 0,$$

и поэтому также

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0.$$

Слѣдовательно, во всѣхъ точкахъ отклоненія имѣло бы мѣсто неравенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot F < 0.$$

Такимъ образомъ сумма степеней $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=0}^{i=n} c_i x^{\alpha_i}$ должна была бы имѣть по крайней мѣрѣ по одному корню между x_i и x_{i+1}, т. е. имѣла бы не менѣе $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Итакъ неравенство (31), а вмѣстѣ съ нимъ и неравенство (30), доказаны.

Замѣтимъ, что неравенство (30) можно получить непосредственно изъ теоремы (34).

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ формулѣ (28) $\varphi(x_i)$ черезъ $P(x_i) \pm L(0)$, находимъ

$$\pm\left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right] = f(x_i) - P(x_i) - P_1(x_i).$$

Такимъ образомъ приближенная сумма $P(x)+P_1(x)$, получающаяся, если въ строкѣ Тэйлора сохранить только первые два члена, отклоняется отъ $f(x)$ во всѣхъ $(n+2)$ точкахъ x_i на $\pm\left(L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}\right)$; слѣдовательно, на основаніи указанной теоремы можно утверждать, что отклоненіе суммы того же вида, наименѣе уклоняющейся отъ $f(x)$ не менѣе, чѣмъ $L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$, т. е.

$$L(1)\geqq L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Примѣчаніе. Согласно терминологіи de la Vallée Poussin (въ упомянутой выше статьѣ),

$$P(x)+P_1(x)$$

есть сумма степеней, наименѣе уклоняющаяся отъ $f(x)$ въ данныхъ $(n+2)$ точкахъ x_i, при чемъ, слѣдовательно,

$$L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$$

есть наименьшее уклоненіе въ этихъ точкахъ.

Глава IV.

Приближенное вычисленіе наименьшаго уклоненія |x| отъ многочлена данной степени.

40. Задача. *Опредѣлить среди всѣхъ многочленовъ степени n, у которыхъ коэффиціентъ при x^p $(0 < p \leqq n)$ равенъ 1, тотъ, который наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ 01.*

Если искомый многочленъ $P_n(x) = x^p - R(x)$, гдѣ $R(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i x^{\alpha_i}$, при чемъ $\alpha_i = i$, когда $i < p$, и $\alpha_i = i + 1$, когда $i \geqq p$, то $R(x)$ есть сумма степеней указаннаго вида наименѣе уклоняющаяся отъ x^p въ промежуткѣ 01. Слѣдовательно, задача будетъ рѣшена, если многочленъ $P_n(x)$ будетъ имѣть $(n+1)$ точки отклоненія (§ 33) на отрѣзкѣ 01. Но для этого достаточно взять многочленъ

$$P_n(x) = \frac{\cos 2n \arccos \sqrt{x}}{A_{2p}},$$

гдѣ

$$\cos 2n \arccos \sqrt{x} = 2^{2n-1}\left[x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \frac{n}{2^3} \cdot \frac{2n-3}{2!} x^{n-2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^l \frac{n}{2^{2l-1}} \cdot \frac{(2n-l-1)\ldots(2n-2l+1)}{l!} x^{n-l} + \ldots \right],$$

и A_{2p} равенъ коэффиціенту при x^p, въ многочленѣ $\cos 2n \arccos \sqrt{x}$ или коэффиціенту при x^{2p} въ $\cos 2n \arccos x$, а именно,

$$A_{2p} = (-1)^{n-p} \frac{2^{2p} \cdot n \cdot (n+p-1)(n+p-2)\ldots(2p+1)}{(n-p)!},$$

если $p < n-1$, $A_{2n-2} = -2^{2n-2} n$ и $A_{2n} = 2^{2n-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, многочленъ $P_n(x)$ имѣетъ коэффиціентъ при x^p равный единицѣ и кромѣ того онъ имѣетъ $(n+1)$ точекъ отклоненія $x_i = \cos^2 \frac{i\pi}{2n}$, гдѣ $i = 0, 1, \ldots n$, на отрѣзкѣ 01.

Это отклоненіе такимъ образомъ равно $\frac{1}{|A_{2p}|}$; напримѣръ, для $p=1$, оно равно $\frac{1}{2n^2}$; для $p=2$, оно равно $\frac{3}{2n^2(n^2-1)}$ и т. д.

41. Задача [1]). *Опредѣлить среди всѣхъ многочленовъ степени n, имѣющихъ коэффиціентъ при x^p равный единицѣ, гдѣ $0<p\leq n$, многочленъ наименьше уклоняющійся отъ нуля въ промежуткѣ* $(-1, +1)$.

Пусть сначала p будетъ числомъ *четнымъ*. Въ такомъ случаѣ, если $x^p+Q(x)$ удовлетворяетъ задачѣ, то тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и $x^p+Q(-x)$, и тѣмъ болѣе многочленъ $x^p+\frac{Q(x)+Q(-x)}{2}$ будетъ также наименѣе уклоняющимся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, +1)$; но этотъ послѣдній многочленъ будетъ составленъ изъ однихъ только четныхъ степеней. Поэтому оставляя въ сторонѣ вопросъ, будетъ ли это рѣшеніе единственнымъ (читатель легко убѣдится, что, хотя это и не вытекаетъ непосредственно изъ общей теоріи, но и въ данномъ случаѣ рѣшеніе будетъ только одно), можемъ ограничиться допущеніемъ, что $Q(x)$ составленъ только изъ четныхъ степеней.

Поэтому, полагая $x^2=y$, мы можемъ привести нашу задачу къ предыдущей. Слѣдовательно, искомый многочленъ будетъ

$$x^p+Q(x)=\frac{\cos n \arccos x}{B_p},$$

если n четное число, и

$$x+Q(x)=\frac{\cos(n-1)\arccos x}{B_p},$$

если n нечетное число, гдѣ B_p равенъ коэффиціенту при x^p въ числителѣ.

Иными словами, *наилучшее приближеніе $x^p=x^{2k}$ при помощи многочлена степени $2n$ или $2n+1$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ то же, что наилучшее приближеніе x^k при помощи многочлена степени n на отрѣзкѣ* $(0, 1)$.

Допустимъ далѣе, что p *нечетное* число, $p=2k+1$. Въ такомъ случаѣ, если многочленъ $x^p+Q(x)$ даетъ рѣшеніе задачи, то тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и многочленъ $x^p-Q(-x)$, а тѣмъ болѣе многочленъ $x^p+\frac{Q(x)-Q(-x)}{2}$ будетъ наименѣе уклоняющимся отъ нуля на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Слѣдовательно, можемъ ограничиться предположеніемъ, что искомый многочленъ составленъ изъ однихъ только нечетныхъ степеней. Задача сводится такимъ образомъ къ опредѣленію суммы нечетныхъ степеней $x, x^3, \ldots x^{2k-1}, x^{2k+3}, \ldots x^n$ (или x^{n-1}, если n четное число), наименѣе уклоняющейся на отрѣзкѣ 01 отъ $x^p=x^{2k+1}$;

[1]) Эта задача, какъ я узналъ впослѣдствіи, была уже рѣшена при помощи другихъ разсужденій въ упомянутомъ выше сочиненіи В. Маркова.

число этихъ степеней равно $\frac{n-1}{2}$, если n нечетное число, а если n четное число, оно равно $\frac{n-2}{2}$. Слѣдовательно, задача будетъ рѣшена, если сумма $x^p+Q(x)$ имѣетъ $\frac{n+1}{2}$, а во второмъ случаѣ $\frac{n}{2}$ точки отклоненія на отрѣзкѣ 01. По этимъ свойствомъ обладаетъ

$$x^p+Q(x)=\frac{\cos n \arccos x}{B_p},$$

при n нечетномъ, и

$$x^p+Q(x)=\frac{\cos (n-1) \arccos x}{B_p},$$

при n четномъ, гдѣ B_p коэффиціентъ при x^p числителя.

Пусть, напримѣръ, $p=1$. Тогда

$$B_1=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n$$

(при n нечетномъ), и

$$B_1=(-1)^{\frac{n-2}{2}}.(n-1)$$

(при n четномъ).

Примѣчаніе. Такимъ образомъ сумма $x+a_1x^3+\ldots+a_nx^{2n+1}$ въ промежуткѣ $(0, 1)$ не можетъ оставаться менѣе $\frac{1}{2n+1}$, при этомъ *сумма эта, дѣйствительно, не превышаетъ* $\frac{1}{2n+1}$, *если она равна многочлену* $\frac{(-1)^n}{2n+1}.\cos(2n+1)\arccos x$.

42. Преобразованіе задачи вычисленія уклоненія $|x|$. Въ виду того, что функція $|x|$ четная, мы заключаемъ, какъ въ предыдущемъ §'ѣ, что многочленъ, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ можно предположить состоящимъ только изъ четныхъ степеней. Слѣдовательно, этотъ многочленъ есть ничто иное, какъ сумма $\sum\limits_{i=0}^{n} b_ix^{2i}$, наименѣе уклоняющаяся отъ x въ промежуткѣ 01; но вмѣсто того, чтобъ изслѣдовать эту сумму, мы будемъ разсматривать сумму, составленную только изъ четныхъ степеней: $x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$ (безъ нулевой степени). Другими словами, мы будемъ изучать наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ изъ многочленовъ, равныхъ нулю при $x=0$. Если мы обозначимъ черезъ E'_{2n} наименьшее уклоненіе, соотвѣтствующее суммѣ послѣдняго вида (безъ постояннаго члена), а черезъ E_{2n} наименьшее уклоненіе, соотвѣтствующее первоначальной суммѣ, то легко убѣдиться, что

$$E'_{2n} \geqq E_{2n} \geqq \tfrac{1}{2} E'_{2n}. \qquad (32)$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно; второе вытекаетъ изъ того, что, если многочленъ $P_{2n}(x)$ уклоняется на E_{2n} отъ $|x|$, то $P_{2n}(x) - P_{2n}(0)$ обращается въ нуль при $x = 0$, и не уклоняется отъ $|x|$ болѣе, чѣмъ на $2E_{2n}$ (не трудно было бы убѣдиться, что знаки равенства въ неравенствахъ (32) можно отбросить).

Примѣчаніе. Если многочленъ $P(x)$ наименѣе уклоняется отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то $hP\left(\frac{x}{h}\right)$ есть многочленъ наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-h, +h)$; слѣдовательно, наименьшее уклоненіе пропорціонально длинѣ промежутка $2h$.

43. Теорема. *Наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы вида* $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ *отъ x больше наименьшаго уклоненія отъ x суммы вида* $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$, *если* $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_1 \geqq \beta_2, \ldots \alpha_n \geqq \beta_n$, *при чемъ вообще всѣ* $\beta_i > 1$.

Положимъ сначала, что

$$\beta_1 < \alpha_1 \leqq \beta_2 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \alpha_n.$$

Пусть сумма $Q(x) = B_1 x^{\alpha_1} + \ldots + B_n x^{\alpha_n}$ будетъ наименѣе уклоняющейся отъ x на отрѣзкѣ 01. Въ такомъ случаѣ несомнѣнно

$$B_1 > 0, \quad B_2 < 0, \quad B_3 > 0, \text{ и т. д.,}$$

ибо уравненіе $x - Q(x) = 0$ должно имѣть по крайней мѣрѣ n положительныхъ корней.

Для примѣненія теоремы (37), строимъ функцію

$$F(x, \lambda) = x + (\lambda - 1)Q(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $P(x, \lambda)$ есть сумма вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$, наименѣе уклоняющаяся отъ $x + (\lambda - 1)Q(x)$. Не трудно убѣдиться, что въ данномъ случаѣ примѣненіе указанной теоремы законно.

Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты суммы

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + (\lambda - 1)Q'(x) - P'_x(x, \lambda),$$

при $\lambda < 1$, не могутъ имѣть болѣе чѣмъ n чередованій знаковъ, поэтому $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ имѣетъ не болѣе n положительныхъ простыхъ корней, такъ что при всякомъ λ конецъ отрѣзка 1 будетъ точкой отклоненія, и кромѣ того, ни въ одной изъ внутреннихъ точекъ отклоненія не будетъ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$.

Итакъ вычисляемъ производную по параметру λ,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = Q(x) - P'_\lambda(x, \lambda),$$

которая обращается въ нуль не менѣе, чѣмъ при n положительныхъ значеніяхъ x. Отсюда слѣдуетъ, что число чередованій знаковъ коэффиціентовъ не менѣе n, а потому первый коэффиціентъ въ $-P'$ долженъ быть отрицательнымъ. Въ такомъ случаѣ $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть ровно n положительныхъ корней, и при x весьма маломъ, въ частности въ ближайшей къ 0 точкѣ отклоненія, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть знакъ своего перваго члена, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} < 0.$$

Но въ этой точкѣ $F(x, \lambda) > 0$; слѣдовательно и

$$\frac{dL}{d\lambda} < 0,$$

откуда заключаемъ, что отклоненіе $L(\lambda)$ идетъ убывая, въ то время какъ λ возрастаетъ отъ 0 до 1. Такимъ образомъ

$$L(1) < L(0).$$

Изъ правильности теоремы въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ, легко заключить ея справедливость въ самомъ общемъ случаѣ. Для этого достаточно составить слѣдующую таблицу показателей:

$$\begin{gathered}
\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_n; \\
\frac{(n-2)\alpha_1+\beta_1}{n-1},\ \beta_1,\ \alpha_3 \ldots \alpha_n; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\alpha_1+(n-2)\beta_1}{n-1},\ \beta_2, \ldots \beta_{n-1},\ \alpha_n; \\
\beta_1,\ \beta_2, \ldots \ldots \ldots \beta_n.
\end{gathered}$$

Сравнивая каждый рядъ показателей съ предыдущимъ, мы видимъ, что они удовлетворяютъ условіямъ только что разсмотрѣннымъ нами. Поэтому беря послѣдовательно суммы степеней, соотвѣтствующія каждому ряду, получимъ a fortiori, что и въ общемъ случаѣ наименьшее уклоненіе x отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ больше наименьшаго уклоненія отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$.

44. Слѣдствія. А. *Наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ* 01 *многочлена вида* $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$ *отъ* x *меньше, чѣмъ* $\frac{1}{2n+1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ § 41 мы знаемъ, что наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы нечетныхъ степеней $a_1x^3 + \ldots + a_nx^{2n+1}$ отъ x равно $\frac{1}{2n+1}$.

B. *Наименьшее уклоненіе отъ x многочлена вида $B_1x^4 + \ldots + B_nx^{2n+2}$ на отрѣзкѣ 01 больше, чѣмъ $\frac{1}{2n+1}$.*

45. Теорема. *Наименьшее уклоненіе E'_{2n} многочлена безъ свободнаго члена степени $2n$ отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, при $n > 1$, удовлетворяетъ неравенствамъ* [1]):

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} < E'_{2n} < \frac{1}{2n+1}. \tag{33}$$

Въ самомъ дѣлѣ, E'_{2n} есть въ тоже время наименьшее отклоненіе отъ x на отрѣзкѣ 01 многочлена вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$; слѣдовательно, второе изъ неравенствъ равнозначно слѣдствію A предыдущаго §'а. Для доказательства перваго неравенства разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

По предположенію

$$|x - A_1x^2 - A_2x^4 - \ldots - A_nx^{2n}| \leq E'_{2n} \tag{34}$$

на отрѣзкѣ 01. Поэтому при всякомъ положительномъ значеніи μ будемъ тѣмъ болѣе имѣть на томъ же отрѣзкѣ

$$\left|\frac{x}{1+\mu} - A_1\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2 - \ldots\ldots\right| \leq E'_{2n},$$

откуда

$$|(1+\mu)x - A_1x^2 - \ldots\ldots| \leq E'_{2n}\cdot(1+\mu)^2;$$

но вычитая изъ этого неравенства неравенство (34), получимъ неравенство вида

$$|\mu(x - B_1x^4 - \ldots - B_{n-1}x^{2n})| \leq E'_{2n}\cdot[(1+\mu)^2+1],$$

и наконецъ,

$$|x - B_1x^4 - \ldots - B_{n-1}x^{2n}| \leq E'_{2n}\cdot\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}.$$

---

[1]) Случай $n = 1$ непосредственно приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія, изъ котораго получается $E'_2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$.

Съ другой стороны, изъ слѣдствія B предыдущаго §'а мы знаемъ, что $|x - B_1x^4 - \ldots - B_{n-1}x^{2n}|$ должна (при $n > 1$) становиться болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2n-1}$. Слѣдовательно,

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu},$$

каково бы ни было положительное число μ.

Но

$$\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}$$

достигаетъ минимума при $\mu = \sqrt{2}$; такимъ образомъ въ частности

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot 2(1+\sqrt{2}),$$

откуда

$$E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

Примѣчаніе. На основаніи неравенствъ (32) и (33) можемъ заключить, что

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} \qquad (33^{bis})$$

46. Примѣненіе неравенства (30). Какъ мы видѣли въ § 43, примѣненіе теоремы (37) является вполнѣ законнымъ, если

$$F(x, \lambda) = x + (\lambda - 1)Q(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $Q(x)$ многочленъ вида $B_1x^3 + B_2x^5 + \ldots + B_nx^{2n+1}$, наименѣе уклоняющійся отъ x въ промежуткѣ 01, а $P(x, \lambda)$ многочленъ вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$, наименѣе уклоняющійся отъ $x + (\lambda - 1)Q(x)$ въ томъ же промежуткѣ. Мы знаемъ, что

$$x - Q(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \cos(2n+1)\arccos x$$

и

$$L(0) = \frac{1}{2n+1},$$

а первоначальными точками отклоненія служатъ

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}. \qquad (i = 0, 1, \ldots n)$$

Такимъ образомъ

$$1 - Q(1) = (-1)^n L(0),$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - Q\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{n-1} L(0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{n\pi}{2n+1} - Q\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = L(0);$$

а уравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ (28), имѣютъ форму

$$Q(1) - P_1(1) = (-1)^n \frac{dL(0)}{d\lambda},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) - P_1\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Складывая каждое изъ равенствъ первой группы съ соотвѣтствующимъ уравненіемъ второй группы, получимъ

$$1 - P_1(1) = (-1)^n \left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right],$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{n-1}\left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right], \qquad (35)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{n\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Многочленъ $P_1(x)$ имѣетъ форму $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$. Слѣдовательно, уравненія (35) вполнѣ опредѣляютъ его коэффиціенты, а также $\varrho = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$. Для удобства рѣшенія этихъ уравненій, замѣтимъ, что къ нимъ можно присоединить уравненія

$$-\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) = \varrho,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (35^{\text{bis}})$$

$$-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n \varrho.$$

Такимъ образомъ многочленъ $P_1(x)$ есть многочленъ степени не выше $(2n+1)$, который благодаря равенствамъ (35) и (35^{bis}) долженъ въ $(2n+2)$ точкахъ $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i=0,\ 1,\dots 2n+1)$ принимать значенія $x_i - \varrho(-1)^{n+i}$, если $i < n$, и $-x_i + \varrho(-1)^{n+i}$, если $i > n$, которыя станутъ опредѣленными, если ϱ выбрать такъ, чтобъ $P_1(0) = 0$. Поэтому, примѣняя извѣстную формулу для интерполированія, получимъ

$$P_1(x) = S(x)\left[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i - \varrho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{x_i - \varrho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)}\right], \tag{36}$$

гдѣ

$$S(x) = \sin(2n+1)\arccos x\,.\sqrt{1-x^2}$$

многочленъ степени $2n+2$, имѣющій корнями $x_i (i=0,\ 1,\dots 2n+1)$.

Условіе, что $P_1(0)=0$, приводитъ насъ къ уравненію

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i - \varrho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{x_i - \varrho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} = 0,$$

изъ котораго опредѣляемъ ϱ. Для этого замѣчаемъ, что

$$S'(x) = -(2n+1)\cos(2n+1)\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(2n+1)\arccos x,$$

откуда

$$S'(x_i) = -(2n+1).(-1)^i, \text{ если } i=1,\ 2,\dots 2n,$$

и

$$S'(x_i) = -2(2n+1).(-1)^i, \text{ если } i=0 \text{ или } 2n+1.$$

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{S'(x_i)} = \frac{-1}{2n+1}\left[\frac{1}{2} - 1 + 1 + \dots + (-1)^n\right] = \frac{-(-1)^n}{2(2n+1)},$$

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{1}{S'(x_i)} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{2} - 1 + \dots + (-1)^n\right] = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)}.$$

Слѣдовательно,

$$\varrho\left[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-1)^i}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{(-1)^i}{x_i S'(x_i)}\right] = \frac{-1}{2n+1},$$

или

$$\varrho\left[1 + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}} - \sum_{i=n+1}^{i=2n}\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}}\right] = 1,$$

и наконецъ

$$\varrho = \frac{1}{1 + 2\sum\limits_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{\cos\dfrac{i\pi}{2n+1}}}. \tag{37}$$

Пользуясь неравенствомъ (30), мы получимъ отсюда нижнюю границу для $L(1) = E'_{2n}$, а именно,

$$E'_{2n} > \varrho = \frac{1}{1 + 2\sum\limits_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{\cos\dfrac{i\pi}{2n+1}}}.$$

Но

$$1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos\dfrac{i\pi}{2n+1}} < \frac{1}{\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}} + \int_0^n \frac{dx}{\cos\dfrac{x\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}} +$$

$$+ \frac{2n+1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2n+1}} \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}} + \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)\log\frac{1+\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}}{\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\pi}{4n+2} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \ldots} + \frac{2n+1}{\pi}\log\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right) -$$

$$-\frac{2n+1}{\pi}\log\left[\frac{\pi}{4n+2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \ldots} +$$

$$+ \frac{2n+1}{\pi}\log\left(2 - \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + \ldots\right) + \frac{2n+1}{\pi}\log\frac{4n+2}{\pi} -$$

$$-\frac{2n+1}{\pi}\log\left(1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{2n+1}{\pi}\log\frac{8n+4}{\pi} + \frac{4n+2}{\pi} + \varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно, и, при всякомъ n, $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно, при всякомъ n,

$$E'_{2n} > \varrho > \frac{\pi}{(4n+2)\left[2 + \log\dfrac{8n+4}{\pi}\right]}. \tag{38}$$

Неравенство (38), какъ мы видимъ, даетъ значительно менѣе близкую къ E'_{2n} нижнюю границу, чѣмъ неравенство (33).

47. Замѣна приближеннаго многочлена $P_1(x)$ другимъ многочленомъ. Вмѣсто того, чтобъ продолжать систематическое примѣненіе общаго метода, разсмотримъ многочленъ $R(x)$ степени $2n$, опредѣляемый условіями, что онъ равенъ $|x|$ въ точкахъ $x_k = \cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}$ $(k=0,\ 1,\dots 2n-1)$, гдѣ $T(x) = \cos 2n \arccos x = 0$, и кромѣ того равенъ нулю при $x=0$.

Замѣчаемъ, что

$$T'(x) = \frac{2n \sin 2n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому

$$T'(x_k) = (-1)^k \frac{2n}{\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}.$$

Слѣдовательно,

$$R(x) = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} - \sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right]. \quad (39)$$

Но, съ другой стороны,

$$x = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} + \sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right].$$

Откуда

$$x-R(x) = \frac{xT(x)}{n}\sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} = \frac{-xT(x)}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}; \quad (40)$$

и такъ какъ многочленъ $R(x)$ представляетъ собой сумму четныхъ степеней, то $|x| - R(x)$, какъ при положительныхъ, такъ и при отрицательныхъ значеніяхъ x, равняется разности $x - R(x)$, взятой только для *положительныхъ* значеній x.

Преобразуемъ сумму

$$H = -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x + \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= -\sum_{k=1,3,\ldots,n-1} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right] - \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,3,\ldots,n-1} \frac{2x \sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n} + \sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x + \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}, \tag{41}$$

полагая для опредѣленности n четнымъ.

Теперь легко убѣдиться, что для всякаго *опредѣленнаго* положительнаго значенія x,

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ xH(x) = \frac{1}{2}. \tag{42}$$

Дѣйствительно,

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ xH(x) = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{\pi}{2n} \frac{x^2\cos\frac{k\pi}{2n} + x}{\left(x + \cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2} = \frac{x}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha + 1}{(x+\cos\alpha)^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$|x| - R(x) = \frac{\cos 2n \arccos x}{2n} + \frac{\varepsilon_n(x)\cos 2n\arccos x}{2n}, \tag{43}$$

при чемъ $\varepsilon_n(0) = -1$, и $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ \varepsilon_n(x) = 0$, если $|x| > 0$.

48. Опредѣленіе нижней границы E'_{2n}. Многочленомъ $R(x)$ можно воспользоваться для опредѣленія нижней границы E'_{2n} при помощи обобщенной теоремы de la Vallée Poussin.

Для этого покажемъ сначала [1]), что при всякомъ $x > 0$,

$$H(x) > \frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{x + \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x + \frac{2n+1}{4n}\pi}\right]. \tag{44}$$

[1]) Мы предполагаемъ $n \geqq 2$. Случай, когда $n=1$, не представляетъ никакихъ трудностей, какъ это уже было замѣчено ранѣе.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$H(x) > \sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{1,3,\ldots,n-1}\frac{1}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$=\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{1,3,\ldots}\frac{1}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} >$$

$$>\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{1,3,\ldots}\frac{1}{\left(x+\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\left(x+\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} >$$

$$>\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sum_{1,3,\ldots}\frac{1}{\left[x+\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]\left[x+\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right]} >$$

$$>\frac{\pi}{2(2n+1)}\sum_{1,2,\ldots n}\frac{1}{\left(x+\frac{2k-1}{4n}\pi\right)\left(x+\frac{2k+1}{4n}\pi\right)} =$$

$$=\frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{x+\frac{\pi}{4n}}-\frac{1}{x+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right].$$

Отсюда заключаемъ безъ труда, что при $x \geqq \frac{\pi}{8n}$

$$x\,.\,H(x) > \frac{n}{2n+1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right);$$

а потому, какъ бы мало ни было ε, можно взять n достаточно большимъ, чтобъ имѣть

$$x\,.\,H(x) > \frac{1-\varepsilon}{6}.$$

Поэтому разность

$$x - R(x) = \frac{x\,.\,H(x)\,.\,T(x)}{n},$$

въ точкахъ

$$Z_i = \cos\frac{i\pi}{2n}, \qquad (i=0,\ 1,\ldots n-1)$$

послѣдовательно мѣняя знакъ, становится по абсолютному значенію больше $\frac{1-\varepsilon}{6n}$ и, наконецъ, снова перемѣнивъ знакъ, въ точкѣ $\frac{\pi}{8n}$ превышаетъ

$$\frac{1-\varepsilon}{6n}\,T\left(\frac{\pi}{8n}\right).$$

Примѣняя обобщенную теорему de la Vallée Poussin, заключаемъ, что

$$E'_{2n} > \frac{1-\varepsilon}{6n} \cdot T\left(\frac{\pi}{8n}\right),$$

или, полагая n достаточно большимъ, находимъ

$$E'_{2n} > \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2n}. \tag{45}$$

Примѣчаніе. Легко было бы провѣрить, что $E'_{2n} > \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n}$ для всякаго n; но это неравенство менѣе точно, чѣмъ неравенство (33), которое получено было уже выше другимъ способомъ.

Въ прилагаемомъ ниже добавленіи къ этой главѣ рѣчь будетъ итти о приближенномъ вычисленіи E_{2n}. Что же касается E'_{2n}, то, пользуясь болѣе точнымъ вычисленіемъ $xH(x)$, для весьма большихъ значеній n, можно получить, пользуясь тѣмъ же многочленомъ $R(x)$,

$$E'_{2n} > \frac{0{,}34}{2n}.$$

Добавленіе [1] къ главѣ IV.

Вычисленіе $E_{2n}|x|$ для весьма большихъ значеній n.

49. Преобразованіе разности $|x|-R(x)$ для весьма большихъ значеній n. Согласно обозначеніямъ § 47, равенству (40) можно придать видъ [2])

$$|x|-R(x)=\frac{xT(x).H(x)}{n}, \tag{40bis}$$

гдѣ

$$H(x)=\sum_{k=1,3,\dots n-1}\frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}. \tag{41}$$

Но при безконечномъ возрастаніи n, $xH(x)$ стремится, очевидно, къ тому же предѣлу, что и

$$xH_1(x)=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1,3,\dots}\frac{x^2\cos\frac{k\pi}{2n}+x}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]},$$

при чемъ разность $xH(x)-xH_1(x)$ равномѣрно стремится къ нулю, если $0\leqq x\leqq 1$. Такимъ образомъ

---

[1]) Важнѣйшіе результаты этого добавленія были сообщены мной Парижской Академіи Наукъ 22-го января 1912 года; замѣчу при этомъ, что неравенства (3) упомянутаго сообщенія должны быть замѣнены неравенствами (59) печатаемаго ниже текста.

[2]) Принимая во вниманіе, что мы имѣемъ въ виду лишь весьма большія значенія n, можно ограничиться разсмотрѣніемъ четныхъ значеній n, благодаря чему $T(x)=$ $=\cos 2n\arccos x=\cos 2n\arcsin x$.

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}[xH_1(x) + \alpha_n],$$

гдѣ α_n *равномѣрно* приближается къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно.

Я говорю далѣе, что *разность*

$$\delta_n = xH_1(x) - xH_2(x),$$

гдѣ

$$H_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}}, \tag{46}$$

также равномѣрно стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n, *если* $0 \leqq x \leqq 1$.

Для того, чтобъ въ этомъ убѣдиться, замѣчаемъ сперва, что

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1,3,\dots n-1} \frac{x^2 \sin\frac{k\pi}{2n} + x}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Беремъ далѣе нѣкоторое произвольно малое число x_0. Изъ § 47 мы уже знаемъ, что, при $x \geqq x_0$, $xH(x)$, а поэтому и $xH_1(x)$, при n достаточно большомъ, равномѣрно приближается къ $\frac{1}{2}$; но не трудно видѣть, что къ тому же предѣлу равномѣрно стремится (при $x \geqq x_0$) и

$$F(v) = xH_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\dots} \frac{x}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}} = \sum_{1,3,\dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}}, \tag{46bis}$$

гдѣ $v = \frac{2nx}{\pi}$ безконечно возрастаетъ. Дѣйствительно,

$$\int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} < 2 \sum_{1,3,\dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} < \int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} + 2\frac{v}{(v+1)^2 - \frac{1}{4}};$$

поэтому, при $v = \infty$,

$$\text{пред.} \sum_{1,3,\dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{v}{2} \log \frac{v + \frac{3}{2}}{v + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Разсмотримъ, съ другой стороны, значенія $x < x_0$. Для этихъ значеній разобьемъ на двѣ части сумму

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\ldots} \frac{x^2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} +$$

$$+ \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\ldots} \frac{x}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]},$$

и изслѣдуемъ сначала часть

$$xH_1'(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\ldots} \frac{x}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Здѣсь мы можемъ снова положить $v = \frac{2nx}{\pi}$, такъ что

$$xH_1'(x) = \sum_{1,3,\ldots} \frac{v}{\left[v + \frac{2n}{\pi}\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[v + \frac{2n}{\pi}\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Въ этой суммѣ разсматриваемъ во первыхъ члены, у которыхъ

$$k + \frac{1}{2} \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0}.$$

Каждый изъ этихъ членовъ напишемъ въ видѣ

$$I_k = \frac{v}{\left\{v + \left(k - \frac{1}{2}\right)\left[1 - \Theta\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{4n^2}\right]\right\}\left\{v + \left(k + \frac{1}{2}\right)\left[1 - \Theta_1\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{4n^2}\right]\right\}},$$

гдѣ $\Theta < \frac{1}{6}$, $\Theta_1 < \frac{1}{6}$, или

$$I_k = \frac{v}{\left[v + \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \Theta' x_0\right)\right]\left[v + \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \Theta_1' x_0\right)\right]},$$

при чемъ также $\Theta' < \frac{1}{6}$ и $\Theta_1' < \frac{1}{6}$. Откуда находимъ

$$\frac{I_k'}{\left(1 - \frac{x_0}{6}\right)^2} > I_k > I_k',$$

обозначая черезъ

$$I'_k = \frac{v}{\left[v+\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\left[v+\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]} = \frac{v}{(v+k)^2-\frac{1}{4}}$$

соотвѣтствующій членъ ряда (46^{bis}). Такимъ образомъ и

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_0}{6}\right)^2}\Sigma I'_k > \Sigma I_k > \Sigma I'_k$$

для значеній k, удовлетворяющихъ неравенству

$$k+\frac{1}{2} \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0}.$$

Перейдемъ теперь къ остальнымъ членамъ. Замѣчаемъ, что вообще $\sin\frac{\pi b}{2} > b$ (если $0 < b < 1$); поэтому

$$I_k < \frac{v}{\left[v+\frac{2}{\pi}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\left[v+\frac{2}{\pi}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]} = \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} I_k < \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k_0-\frac{1}{2}\right)}.$$

Такимъ образомъ сумма всѣхъ членовъ, для которыхъ

$$k+\frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0},$$

меньше, чѣмъ

$$\frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi}-1\right)} \leqq \frac{\pi n x_0}{2nx_0+2\left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi}-1\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{x_0}}{\frac{2}{\pi}+\sqrt{x_0}-\frac{1}{n\sqrt{x_0}}};$$

поэтому, взявъ n достаточно большимъ $\left(\text{а именно, } n > \frac{1}{x_0}\right)$, мы можемъ сдѣлать указанную сумму меньшею, чѣмъ $\pi\sqrt{x_0}$. Ясно, что послѣднее утвержденіе тѣмъ болѣе будетъ справедливо для суммы соотвѣтствующихъ членовъ ряда (46^{bis}). Отсюда слѣдуетъ, что, при $x < x_0$ и $n > \frac{1}{x_0}$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < \frac{xH_2(x)}{\left(1-\frac{x_0}{6}\right)^2} + \pi\sqrt{x_0},$$

или, замѣчая, что $xH_2(x) < 1$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < xH_2(x) + \frac{x_0}{2} + \pi\sqrt{x_0}.$$

Остается, наконецъ, еще замѣтить, что первая часть

$$xH_1''(x) = \frac{\pi}{2n}\sum_{1,3,\ldots}\frac{x^2\sin\frac{k\pi}{2n}}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

суммы $xH_1(x)$ менѣе, чѣмъ $x^2H_1'(x)$; слѣдовательно,

$$xH_2(x) < xH_1(x) < xH_2(x) + 5x_0 + \pi\sqrt{x_0}.$$

Такимъ образомъ, разность

$$\delta_n(x) = xH_1(x) - xH_2(x),$$

какъ для $x \geq x_0$, такъ и для $x < x_0$ равномѣрно стремится къ нулю, если n возрастаетъ безконечно.

Поэтому для всѣхъ значеній x можемъ написать

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}\left[xH_2(x) + \beta_n\right], \tag{47}$$

или

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}\left[F(x) + \beta_n\right], \tag{47bis}$$

гдѣ β_n *равномѣрно* стремится къ нулю.

Слѣдствіе. *Предѣлъ $xH_2(x)$ равенъ $\frac{1}{2}$, если nx возрастаетъ безконечно.* Такимъ образомъ

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{2n}\left[1 + \varepsilon_n(x)\right],$$

гдѣ $\varepsilon_n(x)$ стремится къ нулю, если nx возрастаетъ безконечно.

50. Опредѣленіе верхней границы E_{2n}. Построимъ многочленъ

$$Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n} \tag{48}$$

Я говорю, что максимумъ разности $||x| - Q(x)|$ равенъ $\frac{1+\varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n=\infty$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|x| - Q(x) = \frac{T(x)}{n}\left[xH_2(x) - \frac{1}{4} + \beta_n\right].$$

Такимъ образомъ, наше утвержденіе будетъ доказано, если мы убѣдимся, что

$$xH_2(x) < \frac{1}{2}, \tag{49}$$

такъ какъ $|T(x)| \leqq 1$.

Преобразуемъ для этого выраженіе

$$xH_2(x) = F(v) = \sum_{k=1,3,\dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = 2v\left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \frac{1}{2v+7} + \dots\right], \tag{46$^{\text{bis}}$}$$

воспользовавшись нѣкоторыми классическими результатами изъ теоріи функціи Γ.

Извѣстно, что

$$\psi(a) = \frac{d\log\Gamma(a)}{da} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \dots,$$

гдѣ γ есть постоянная (Эйлера). Поэтому

$$F(v) = \frac{v}{2}\left\{(\gamma-\gamma) - \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2}+\frac{1}{4}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2}+\frac{3}{4}}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2}+\frac{5}{4}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2}+\frac{7}{4}}\right)\right] - \dots\right\} = \frac{v}{2}\left[\psi\left(\frac{v}{2}+\frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\right].$$

Кромѣ того, извѣстно [1]) также, что

$$\psi(a+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{y^a - 1}{y-1}\,dy.$$

Слѣдовательно,

---

[1]) Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II (Teil I_2). Brunel „Bestimmte Integrale“ § 12.

$$F(v)=\frac{v}{2}\int_0^1\frac{y^{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}}-y^{\frac{v}{2}-\frac{3}{4}}}{y-1}\,dy=v\int_0^1\frac{z^{v+\frac{1}{2}}-z^{v-\frac{1}{2}}}{z^2-1}\,dz=v\int_0^1\frac{z^{v-\frac{1}{2}}}{z+1}\,dz. \quad (50)$$

Интегрируя по частямъ, получимъ последовательно

$$F(v)=v\left[\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{v+\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{z^{v+\frac{1}{2}}\,dz}{(z+1)^2}\right]=v\left[\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{(2v+1)(2v+3)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)}\int_0^1\frac{z^{v+\frac{3}{4}}\,dz}{(z+1)^3}\right]$$

и т. д., наконецъ,

$$xH_2(x)=F(v)=\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{1}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+\frac{1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}+\ldots\right] \quad (51)$$

Замѣтимъ [1]), хотя мы этимъ свойствомъ и не будемъ пользоваться, что полученный рядъ гипергеометрическій и, согласно общепринятымъ обозначеніямъ (Jordan, Cours d'analyse, t. I, § 379), можно написать

$$F(v)=\frac{v}{2v+1}F\left(1,\ 1,\ v+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right). \quad (51^{bis})$$

Изъ формулы (51) легко вывести, что

$$xH_2(x)=F(v)<\frac{1}{2}. \quad (49)$$

Дѣйствительно, замѣняя въ формулѣ (51) всѣ члены, слѣдующіе за четвертымъ, членами геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $\frac{1}{2}$, получимъ

$$F(v)<\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{v}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+2\frac{1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}\right],$$

неравенство же

$$2\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{1}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+\frac{2.1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}\right]<\frac{1}{2}$$

[1]) Формула (51) можетъ быть также получена непосредственно изъ (46^{bis}) помощи преобразованія Эйлера.

приведеніемъ къ общему знаменателю приводится къ неравенству

$$2v^2+10v+\frac{105}{2}>0,$$

которое, конечно, соблюдено при $v>0$, а потому справедливо и неравенство (49).

Итакъ, уклоненіе многочлена $Q(x)$ отъ $|x|$ равно $\frac{1+\varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n=\infty$.

51. Опредѣленіе нижней границы E_{2n}. Простѣйшій пріемъ опредѣленія нижней границы E_{2n} заключается въ построеніи многочлена, аналогичнаго многочлену (48). Я укажу лишь ходъ вычисленій, которыя легко провѣрить, пользуясь таблицей значеній функціи $F(v)$ и, въ частности, замѣчая, что $F\left(\frac{1}{3}\right)>0{,}282$.

Многочленъ

$$Q_1(x)=R(x)+\frac{F(1).T(x)}{2n},$$

при n весьма большомъ, обладаетъ свойствомъ, что разность

$$|x|-Q_1(x)$$

въ точкѣ 0 равна $-\frac{F(1)}{2n}$, и въ точкахъ $\sin\frac{k\pi}{2n}$ имѣетъ знакъ $(-1)^k$, будучи по абсолютному значенію не менѣе, чѣмъ $\frac{0{,}429}{2n}$. Кромѣ того, въ точкѣ $x=\frac{\pi}{6n}$ разность

$$|x|-Q_1(x)=\frac{1}{2n}\left[F\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}F(1)\right]$$

положительна и не менѣе [1]), чѣмъ $\frac{0{,}067}{2n}$.

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ

$$Q_1(x)-\frac{0{,}181}{2n}$$

въ указанныхъ точкахъ имѣетъ уклоненія отъ $|x|$, неменьшія, чѣмъ $\frac{0{,}248}{2n}$, и при томъ чередующихся знаковъ; поэтому, на основаніи теоремы de la Vallée Poussin, находимъ

---

[1]) Замѣняя $\frac{\pi}{6n}$ другими близкими къ этому числу значеніями, можно было бы повысить нижнюю границу, но не болѣе, чѣмъ на 2 или 3 тысячныя.

$$E_{2n} > \frac{0,248}{2n}.$$

Эту нижнюю границу можно нѣсколько повысить, примѣняя другой пріемъ.

52. Второй способъ вычисленія нижней и верхней границъ E_{2n}. Построимъ многочленъ

$$Q_2(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n^3} \frac{\pi^2 a}{x^2 - \sin^2 \frac{\pi}{4n}} + \frac{B \, . \, T(x)}{n},$$

гдѣ a и B постоянныя величины, которыя мы постараемся опредѣлить наиболѣе благопріятнымъ образомъ. Для весьма большихъ значеній n, первый изъ добавочныхъ членовъ можетъ быть замѣненъ членомъ

$$\frac{a}{n} \, . \, \frac{\cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

гдѣ по прежнему $x = \frac{\pi v}{2n}$, такъ какъ, для конечныхъ значеній v, многочленъ $T(x)$ безконечно мало отличается отъ $\cos \pi v$, а при безконечномъ возрастаніи v первый членъ безконечно малъ по сравненію съ вторымъ.

Будемъ снова разсматривать значенія $|x| - Q_2(x)$ въ тѣхъ же точкахъ. Достаточно будетъ ограничиться вычисленіемъ ихъ для $v = 0$, $\frac{1}{3}$, 1, 2, такъ какъ не трудно будетъ убѣдиться, что въ послѣдующихъ точкахъ уклоненіе будетъ итти увеличиваясь. Находимъ, что

$$\left.\begin{aligned} n \, . \, [|x| - Q_2(x)] &= 4a - B, \text{ при } v = 0; \\ n \, . \, [|x| - Q_2(x)] &= \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3{,}6a - \frac{B}{2}, \text{ при } v = \frac{1}{3}; \\ n \, . \, [|x| - Q_2(x)] &= - F(1) + \frac{4}{3} a + B, \text{ при } v = 1; \\ n \, . \, [|x| - Q_2(x)] &= F(2) - \frac{4}{15} a - B, \text{ при } v = 2. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Постоянныя a и B опредѣляемъ такъ, чтобъ 1-е и 3-е значеніе были равны между собой, а 2-е и 4-е были равны между собой, т. е.

$$\left.\begin{aligned} 4a - B &= - F(1) + \frac{4}{3} a + B, \\ \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3{,}6a - \frac{B}{2} &= F(2) - \frac{4}{15} a - B; \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

исключая B, получимъ

$$a = \frac{15}{272}\left[4F(2) - F(1) - 2F\left(\frac{1}{3}\right)\right],$$

откуда

$$0{,}049 < a < 0{,}0501.$$

Разность между 4-мъ и 1-мъ значеніемъ, равная

$$F(2) - \frac{64a}{15},$$

не менѣе, слѣдовательно, чѣмъ 0,26. Отсюда заключаемъ, какъ въ предыдущемъ §'ѣ, что

$$E_{2n} > \frac{0{,}26}{2n}.$$

Можно произвести вычисленія, замѣняя второе значеніе $v = \frac{1}{3}$ другими близкими ему, но значительнаго увеличенія нижней границы такимъ образомъ не получится.

Съ другой стороны, многочленъ $Q_2(x)$ даетъ возможность значительно понизить верхнюю границу E_{2n}. Дѣйствительно, построимъ многочленъ $Q_2(x)$, въ которомъ полагаемъ

$$B = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots = \frac{1}{2}\log 2,\ a = \frac{1}{8}F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\log 2,$$

и разсмотримъ максимумъ модуля разности

$$n.[|x| - Q_2(x)] = T(x)\left[xH(x) - B - \frac{a\pi^2}{4n^2\left(x^2 - \sin^2\frac{\pi}{4n}\right)}\right].$$

Если n безконечно возрастаетъ, эта разность безконечно мало отличается отъ

$$\Phi(v) = \cos\pi v\left[F(v) - B - \frac{a}{v^2 - \frac{1}{4}}\right],$$

при конечныхъ значеніяхъ v; а при безконечномъ возрастаніи v максимумъ этой разности безконечно приближается къ

$$\delta = F(\infty) - B = \frac{1}{2} - B.$$

Такъ какъ

$$B > 4a, \quad \text{то,} \quad \text{при} \quad v = 0,$$

$$-\Phi(0) = B - 4a > 0.$$

Въ остальныхъ же n точкахъ, гдѣ $T(x) = \pm 1$, разсматриваемая разность имѣетъ знакъ $T(x)$, и въ точкѣ $x = \sin\frac{\pi}{4n}$, гдѣ $T(x) = 0$, она положительна. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ максимумы нашей разности положительны, а всѣ минимумы отрицательны. Поэтому при измѣненіи v отъ 0 до $\frac{1}{2}$, наибольшее значеніе $-\Phi(v)$ будетъ $B - 4a$. Наибольшее значеніе $+\Phi(v)$ въ томъ же промежуткѣ будетъ не болѣе, чѣмъ наибольшее значеніе

$$\frac{a\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

такъ какъ $B - F(v) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(v) > 0$. Такимъ образомъ наибольшее значеніе $+\Phi(v)$ въ этомъ промежуткѣ не болѣе, чѣмъ $4a$. Вслѣдствіе выбранныхъ нами значеній для B и a, находимъ

$$B - 4a = 4a = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}34657\ldots$$

Если, при $v > \frac{1}{2}$, знакъ $\Phi(v)$ отличенъ отъ знака $\cos\pi v$, то

$$|\Phi(v)| < a\left|\frac{\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}}\right|,$$

такъ какъ [1]) $F(v) > B$. Но, при $v > \frac{1}{2}$,

$$a\left|\frac{\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}}\right| < a\pi.$$

---

[1]) Легко видѣть, что функція $F(v)$ возрастаетъ, пока $v < \frac{\sqrt{3}}{2}$; но это не очевидно, для большихъ значеній v. Однако не трудно замѣтить, что, при $v > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$F(v) > \frac{2v}{2v+1} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} > 0{,}4 > F\left(\frac{1}{2}\right).$$

(См. приложенную въ концѣ таблицу значеній функціи $F(v)$).

Наконецъ, если $\Phi(v)$ имѣетъ знакъ $\cos \pi v$, то наибольшее значеніе $|\Phi(v)|$ не превышаетъ

$$\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2} - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} . 0{,}307 .$$

Такимъ образомъ, вообще

$$|\Phi(v)| < \frac{1}{2} . 0{,}347,$$

слѣдовательно,

$$||x| - Q_3(x)| < \frac{0{,}347}{2n} .$$

Полученный результатъ можно еще улучшить, сохранивъ значеніе B, но измѣнивъ a, полагая лишь пока $a < \frac{B}{7}$. Пересматривая предыдущее вычисленіе, мы видимъ, что мы несомнѣнно преувеличили значеніе $+\Phi(v)$ въ промежуткѣ 01; опредѣлимъ его точнѣе. $\Phi(v)$ для малыхъ значеній v по прежнему отрицательно; оно можетъ стать болѣе $|\Phi(0)| = B - 4a$ только, если

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B \geqq B - 4a;$$

такимъ образомъ можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ значеній v, достаточно большихъ, чтобъ

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} > 2B - 4a,$$

или

$$v > \sqrt{1 - \frac{2a}{B - 2a}},$$

и такъ какъ $B > 7a$, то $v > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$; въ такомъ случаѣ, $\cos \pi v < 0{,}4$. Слѣдовательно, подлежащія разсмотрѣнію значенія v можно еще увеличить, ограничившись лишь удовлетворяющими неравенству

$$0{,}4\left[\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B\right] \geqq B - 4a,$$

или

$$0,4\left[\frac{a}{\frac{1}{4}-v^2}-B\right]>B-4a.$$

Откуда

$$v>\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8a}{7B-20a}}.$$

Такъ какъ по прежнему $B>7a$, слѣдовательно,

$$v>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{29}}>0,425.$$

Итакъ вмѣсто промежутка $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, достаточно взять промежутокъ $\left(\frac{425}{1000},\ \frac{1}{2}\right)$; въ этомъ промежуткѣ

$$\Phi(v)<a\frac{\cos\pi v}{\frac{1}{4}-v^2}<a\frac{\cos\frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4}-0,1764}<3,4a.$$

Теперь положимъ

$$B-4a=3,4a,$$

откуда

$$a=\frac{B}{7,4}=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)}{7,4}=0,04687.$$

Поэтому

$$B-4a=3,4a<0,16.$$

Слѣдовательно, наконецъ

$$E_{2n}<\frac{0,32}{2n}. \tag{54}$$

53. Третій способъ вычисленія нижней границы E_{2n}. Возьмемъ на отрѣзкѣ $(-1,\ +1)$ точки $\pm\sin\frac{i\pi}{2n}$, при $i=0,\ 1,\ldots n$, и $\pm\beta$, при чемъ пока оставляемъ β произвольнымъ, требуя лишь, чтобъ $\beta<\sin\frac{\pi}{2n}$. Мы знаемъ, на основаніи теоремы (34), что, если уклоненіе нѣкотораго многочлена $f(x)$ степени не выше $2n+1$ отъ $|x|$ въ указанныхъ $2n+3$ точкахъ, послѣдовательно мѣняя знакъ, равно $\pm\varrho$, то $|\varrho|$ будетъ нижней границей $E_{2n+1}=E_{2n}$. Вычисленіемъ числа ϱ мы сейчасъ и займемся.

Полагая

$$S_1(x) = (x^2 - \beta^2) . \sqrt{1-x^2} . \sin 2n \arcsin x = (x^2 - \beta^2) . S(x),$$

находимъ, примѣняя формулу интерполированія Лагранжа,

$$f(x) = S_1(x) . \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x - \sin\frac{i\pi}{2n}\right) S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x + \sin\frac{i\pi}{2n}\right) S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho}{x S_1'(0)} + \frac{2(\beta - \varrho)x}{(x^2 - \beta^2) S_1'(\beta)} \right]. \tag{55}$$

Но, если степень многочлена $f(x)$ не выше $(2n+1)$, то ϱ опредѣляется уравненіемъ

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \frac{\varrho}{S_1'(0)} + \frac{2(\beta - \varrho)}{S_1'(\beta)} = 0. \tag{56}$$

Замѣчая затѣмъ, что

$$S_1'(x) = 2xS(x) + (x^2 - \beta^2) S'(x) =$$

$$= 2xS(x) + \left[2n \cos 2n \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin 2n \arcsin x \right] . (x^2 - \beta^2),$$

имѣемъ

$$S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right) = 2n(-1)^i \left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2\right), \quad \text{при} \quad i = 0, 1 \ldots, n-1,$$

$$S_1'\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4n(-1)^n (1 - \beta^2),$$

$$S_1'(\beta) = 2\beta S(\beta).$$

Поэтому уравненіе (56) преобразуется въ

$$\varrho \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{1}{2(1-\beta^2)} + \frac{1}{2\beta^2} + \frac{n}{\beta S(\beta)} \right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i \sin\frac{i\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{(-1)^n}{2(1-\beta^2)} + \frac{n}{S(\beta)} \right]. \tag{56bis}$$

Допустимъ теперь, что n возрастаетъ безконечно, при чемъ $\beta = \frac{\lambda\pi}{2n}$, гдѣ $\lambda < 1$. Въ такомъ случаѣ, вторую часть равенства можемъ написать, вынося n за скобки,

$$n\left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i n \sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}} + \frac{1}{\sin\lambda\pi} + \varepsilon\right],$$

гдѣ ε стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Но

$$\Omega = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i n \sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

представляетъ собой знакоперемѣнный рядъ, въ которомъ, какъ не трудно убѣдиться, члены идутъ послѣдовательно убывая, поэтому

$$\left|\Omega - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i n \sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}}\right| < \frac{n\sin\frac{i_0\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}} < \frac{\frac{i_0\pi}{2}}{i_0^2 - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}};$$

слѣдовательно, можно указать, независимое отъ n, число i_0, чтобъ разсматриваемая разность была менѣе всякой данной величины α. Послѣ того какъ i_0 выбрано, можно будетъ n взять достаточно большимъ, чтобъ сумма

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i n \sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

сколь угодно мало отличалась отъ

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i \frac{i\pi}{2}}{\frac{i^2\pi^2}{4} - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2},$$

откуда, наконецъ,

$$\text{пред.}_{n=\infty}\ \Omega = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2}.$$

Поэтому вторая часть равенства (56^{bis}) получаетъ форму

$$n\left[\frac{1}{\sin\lambda\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2}+\alpha\right], \tag{57}$$

гдѣ $\text{пред.}_{n=\infty}\ \alpha=0$.

Аналогичнымъ образомъ коэффиціентъ при ϱ можно написать сначала

$$n^2\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{n^2\sin^2\dfrac{i\pi}{2n}-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}+\frac{2}{\pi^2\lambda^2}+\frac{2}{\pi\lambda\sin\lambda\pi}+\gamma\right],$$

гдѣ $\text{пред.}_{n=\infty}\ \gamma=0$.

Затѣмъ мы можемъ опять указать независимое отъ n, достаточно большое число i_0, чтобы сумма

$$\sum_{i=i_0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2\sin^2\dfrac{i\pi}{2n}-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}<\sum_{i=i_0}^{i=\infty}\frac{1}{i^2-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

была сколь угодно мала. Поэтому коэффиціентъ при ϱ будетъ равенъ

$$\frac{4n^2}{\pi^2}\left[\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^2-\lambda^2}+\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{\pi}{2\lambda\sin\lambda\pi}+\gamma'\right],$$

гдѣ $\text{пред.}_{n=\infty}\ \gamma'=0$.

Такимъ образомъ, обозначая черезъ ϱ' *главную* часть ϱ, т. е. полагая, что $n(\varrho'-\varrho)$ имѣетъ предѣломъ нуль, при $n=\infty$, получимъ

$$2n\varrho'=\lambda\pi\cdot\frac{\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}+2\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2}}{\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}+\dfrac{1}{\lambda}+\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2\lambda}{i^2-\lambda^2}}. \tag{58}$$

Формулу (58) удобно еще преобразовать слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ, что

$$\pi\operatorname{cotg}\pi\lambda=\frac{1}{\lambda}+\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2-i^2}.$$

Поэтому въ знаменателѣ получимъ

$$\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}+\frac{2}{\lambda}-\pi\operatorname{cotg}\pi\lambda=\frac{2}{\lambda}+\pi\frac{1-\cos\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}=\frac{2}{\lambda}+\pi\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\lambda$$

Съ другой стороны,

$$f(\lambda)=2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^{i}i}{i^2-\lambda^2}=\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i}i\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right)=-\int_0^1\frac{z^{\lambda}+z^{-\lambda}}{z+1}dz.$$

Но

$$\int_0^1\frac{z^{\lambda-1}+z^{-\lambda}}{1+z}dz=\frac{\pi}{\sin\pi\lambda},$$

и

$$\int_0^1\frac{z^{\lambda}+z^{\lambda-1}}{1+z}dz=\frac{1}{\lambda};$$

поэтому

$$\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}+f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}-2\int_0^1\frac{z^{\lambda}}{1+z}dz=\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{\lambda+\frac{1}{2}}F\left(\lambda+\frac{1}{2}\right).$$

Такимъ образомъ

$$2n\varrho'=\frac{\lambda\pi}{2}\cdot\frac{1-\frac{4\lambda}{2\lambda+1}F\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{\lambda\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\lambda}. \tag{58^{bis}}$$

Для вычисленія ϱ' достаточно слѣдовательно знать ту же функцію F, которой мы уже пользовались въ предыдущихъ §§'ахъ.

Очевидно, нужно выбрать λ такъ, чтобъ ϱ' было возможно большимъ. Не останавливаясь на точномъ рѣшеніи этого вопроса, ограничимся значеніемъ [1] $\lambda=\frac{2}{5}$.

Тогда

$$2n\varrho'=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{1-\frac{8}{9}F\left(\frac{9}{10}\right)}{1+\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}36^0}.$$

Полагая, съ точностью до 0,00055,

$$F\left(\frac{9}{10}\right)=0{,}419,$$

находимъ

$$2n\varrho'=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{0{,}628}{1+\frac{\pi}{5}\cdot0{,}727}=\frac{1{,}256}{\frac{10}{\pi}+1{,}454}=\frac{1{,}256}{4{,}537}=0{,}2709.$$

---

[1] Повидимому, максимумъ ϱ' весьма мало отличается отъ полученнаго ниже значенія.

Такимъ образомъ
$$2n\rho' > 0{,}27.$$
А потому
$$E_{2n} > \frac{0{,}27}{2n}.$$

Итакъ, наиболѣе тѣсныя границы, которыя мы нашли для E_{2n}, слѣдующія
$$\frac{0{,}32}{2n} > E_{2n} > \frac{0{,}27}{2n}. \tag{59}$$

Послѣ того, какъ для E_{2n} найдены уже довольно тѣсныя границы [1]), вопросъ объ опредѣленіи E_{2n}, съ какою угодно точностью, теоретически не представляетъ очень большихъ трудностей.

Однако для систематическаго рѣшенія этого вопроса при помощи соотвѣтствующаго метода послѣдовательныхъ приближеній необходимо еще установить нѣкоторыя общія свойства многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ $|x|$, къ выводу которыхъ мы сейчасъ перейдемъ.

54. Теорема. *Если $P(x)$, при n достаточно большомъ, есть многочленъ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то уравненіе*
$$\eta(x) = P(x) - R(x) = 0$$
имѣетъ одинъ и только одинъ корень въ каждомъ изъ $2n$ промежутковъ, заключенныхъ между $\sin\frac{k\pi}{2n}$ *и* $\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}$ $(k = -n, -(n-1), \ldots 0, 1, \ldots n)$.

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большихъ значеніяхъ n,
$$\left||x| - P(x)\right| < \frac{0{,}32}{2n},$$
но въ точкахъ $\sin\frac{k\pi}{2n}$, при всякомъ $k > 0$,
$$\left||x| - R(x)\right| > \frac{0{,}32}{2n},$$
и кромѣ того, для всѣхъ $k \gtreqless 0$,
$$(|x| - R(x)).(-1)^k > 0.$$

---

[1]) Для практики было бы также интересно установить, начиная отъ какого значенія n неравенства (59) соблюдены. Если они окажутся, напримѣръ, правильны для $2n \geqq 18$, то указанныя неравенства позволяютъ утверждать, что низшая степень многочлена, уклоняющагося отъ $|x|$ менѣе, чѣмъ на 0,015 на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, равна 20 или 22.

Слѣдовательно, во всѣхъ этихъ точкахъ

$$P(x)-R(x)=\eta(x)$$

имѣетъ тотъ же знакъ, что $|x|-R(x)$, а потому

$$\eta(x).(-1)^k>0,$$

откуда заключаемъ, что между $\sin\frac{k\pi}{2n}$ и $\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}$ есть по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія $\eta(x)=0$.

Но, при $x=0$, $P(x)>0$ и $R(x)=0$; поэтому между $\pm\sin\frac{\pi}{2n}$ и 0 также есть по одному корню уравненія $\eta(x)=0$.

Такимъ образомъ уравненіе степени $2n$, $\eta(x)=0$, имѣетъ по крайней мѣрѣ по одному корню въ $2n$ промежуткахъ, а потому въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ оно не имѣетъ болѣе одного корня. Ч. и. т. д.

55. Опредѣленіе. *Функціи $Q_n(x)$ называются асимптотическими выраженіями многочленовъ P_n степени n наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи $f(x)$, если уклоненія E'_n функціи $Q_n(x)$ отъ функціи $f(x)$ удовлетворяютъ условію, что*

$$\frac{E'_n-E_n}{E_n}$$

стремится къ нулю, при $n=\infty$.

56. Теорема. *Многочленъ $P(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ*

$$Q(x)=R(x)+\left(\frac{1}{2n}-E_{2n}\right)T(x)+\frac{\beta_n(x)}{n}, \tag{70}$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно.

Для доказательства припомнимъ прежде всего формулу (43), которую можемъ написать

$$2n\left[|x|-R(x)-\frac{T(x)}{2n}\right]=\varepsilon_n(x).T(x).$$

Въ такомъ случаѣ, ясно, что

$$P(x)=R(x)+\frac{1}{2n}(T(x)+\Omega(x)),$$

гдѣ $\Omega(x)$ есть многочленъ степени $2n$ наименѣе уклоняющійся отъ $\varepsilon_n(x).T(x)$; при этомъ уклоненіе $\Omega(x)$ отъ $\varepsilon_n(x).T(x)$ равно $2n.E_{2n}$.

Поэтому наша теорема будетъ доказана, если мы покажемъ, что многочленъ $\Omega(x)$ имѣетъ асимптотическое выраженіе

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x). \tag{60}$$

Для этого замѣчаемъ, что $\varepsilon_n(x)$ становится сколь угодно малымъ, если $n|x| > A$, гдѣ A достаточно большое число. Поэтому, выбирая A соотвѣтствующимъ образомъ, можемъ опредѣлить непрерывную функцію $\delta_n(x)$ условіями

$$\delta_n(x) = \varepsilon_n(x) \,.\, T(x), \text{ при } |x| < \frac{A}{n},$$

$$\delta_n(x) = 0, \qquad \text{при } |x| \geqq \frac{A}{n},$$

такъ, чтобъ

$$|\delta_n(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x)| < \alpha_n,$$

гдѣ α_n стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Очевидно, что многочленъ $\Omega_1(x)$ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, будетъ асимптотическимъ выраженіемъ для $\Omega(x)$, согласно опредѣленію § 55, такъ какъ, обозначая черезъ λ_n уклоненіе $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$, имѣемъ

$$|\lambda_n - 2nE_{2n}| < \alpha_n,$$

и слѣдовательно,

$$\frac{\lambda_n - 2nE_{2n}}{2nE_{2n}}$$

стремится къ нулю.

Такимъ образомъ остается показать, что многочленъ $\Omega_1(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, имѣетъ форму (60), гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно. Изслѣдованіемъ многочлена

$$\Omega_1(x) = c_0 + c_1x^2 + \ldots + c_nx^{2n}$$

мы теперь и займемся.

Между двумя точками отклоненія многочлена $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$ долженъ быть по крайней мѣрѣ одинъ корень, какъ уравненія $\Omega_1(x) - \delta_n(x) = 0$, такъ и уравненія $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)T(x) = 0$. Но это послѣднее уравненіе имѣетъ форму

$$\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)\,T(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^4 + \ldots + A_{n+1}x^{2n} = 0, \tag{61}$$

и потому имѣетъ не болѣе, чѣмъ $(n+1)$ положительныхъ корней. Поэтому, такъ какъ число точекъ отклоненія на отрѣзкѣ 01 не менѣе $n+2$, то оно равно $n+2$, при чемъ концы 0 и 1 также должны быть точками отклоненія. Такимъ образомъ,

$$\Omega_1(0) = -1 + \lambda_n.$$

Докажемъ, что $\Omega_1(x)$ *имѣетъ лишь положительные максимумы* M *и отрицательные минимумы* m; *при этомъ*

$$0{,}5 > M > 0{,}09 \text{ и } -0{,}73 < m < -0{,}09. \tag{65}$$

Прежде всего, замѣчая, что, при $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$|\epsilon_n(x).T(x)| = |2F(v) - 1|.|\cos \pi v| < 0{,}18,$$

выходимъ, что, при этихъ значеніяхъ x,

$$-0{,}18 - \lambda_n < \Omega_1(x) < 0{,}18 + \lambda_n, \tag{62}$$

и между двумя корнями уравненія (61) есть, либо одинъ максимумъ M, либо одинъ минимумъ m, удовлетворяющій неравенствамъ [1])

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5 > \lambda_n + 0{,}18 > M > \lambda_n - 0{,}18 > 0{,}09, \\ 0{,}09 > -\lambda_n + 0{,}18 > m > -\lambda_n - 0{,}18 > -0{,}5. \end{aligned}\right\} \tag{62$^{\text{bis}}$}$$

Разсмотримъ два предположенія. Допустимъ сначала (что́, какъ мы покажемъ дальше, имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности), что

$$\Omega_1(x)$$

въ точкѣ 0 имѣетъ минимумъ. Слѣдовательно, на всемъ отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\Omega_1(x) > -1 + \lambda_n;$$

но, такъ какъ, при $x < \frac{\pi}{4n}$,

$$\epsilon_n(x)T(x) < 0,$$

то, вслѣдствіе неравенства (62), имѣемъ также на всемъ отрѣзкѣ

$$\Omega_1(x) < \lambda_n + 0{,}18.$$

Такимъ образомъ на всемъ отрѣзкѣ,

$$|\Omega_1(x) + 0{,}41 - \lambda_n| < 0{,}59;$$

[1]) Такъ какъ $0{,}27 < \lambda_n < 0{,}32$.

и слѣдовательно, на основаніи теоремы (2), вблизи $x=0$, имѣемъ

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1{,}2n. \tag{63}$$

Еслибъ въ промежуткѣ $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ было бы не болѣе одной точки отклоненія, то всѣ максимумы и минимумы должны были бы удовлетворять неравенствамъ (62^{bis}). Но положимъ, что точекъ отклоненія въ промежуткѣ $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ не менѣе двухъ. Въ ближайшей къ 0 точкѣ отклоненія $x_0 = \frac{\pi v_0}{2n}$ должно быть

$$[2F(v_0)-1]\cos\pi v_0 = \varepsilon_n(x_0)\,.\,T(x_0) > -1 + 2\lambda_n > -0{,}46. \tag{64}$$

Но функція $[2F(v)-1]\cos\pi v$ идетъ возрастая, и, при $v=0{,}2$, съ точностью до 0,001,

$$[2F(v)-1]\cos\pi v = -0{,}466 < -0{,}46;$$

слѣдовательно, $v_0 > 0{,}2$, или $x_0 > \frac{0{,}2\pi}{2n}$.

Я говорю, что въ слѣдующей точкѣ отклоненія x_1, гдѣ $\Omega_1 - \varepsilon_n(x).T(x) > 0$, не только Ω_1 не можетъ быть отрицательнымъ, но, несомнѣнно,

$$\Omega_1 > 0{,}09.$$

Дѣйствительно, допустимъ обратное; тогда въ точкѣ x_1

$$\varepsilon_n(x_1)\,.\,T(x_1) < \Omega_1 - 0{,}27 < -0{,}18,$$

а потому

$$\frac{2nx_1}{\pi} = v_1 < 0{,}4, \quad \text{или} \quad x_1 < \frac{0{,}4\pi}{2n},$$

такъ какъ, съ точностью до 0,001,

$$[2F(0{,}4)-1]\cos 0{,}4\pi = -0{,}115 > -0{,}18.$$

Но въ такомъ случаѣ, мы имѣли бы

$$x_1 - x_0 < \frac{0{,}2\pi}{2n},$$

въ то время какъ

$$\Omega_1(x_1) - \Omega_1(x_0) > 2\lambda_n > 0{,}54,$$

и, слѣдовательно, между x_1 и x_0 существовало бы значеніе x, гдѣ

$$\frac{d\Omega_1}{dx} > \frac{5,4}{\pi} n,$$

что противорѣчитъ неравенству (63).

Такимъ образомъ, начиная отъ x_1, каждой точкѣ отклоненія, гдѣ $\Omega_1 - \varepsilon_n(x) T(x) > 0$, соотвѣтствуетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный максимумъ Ω_1, гдѣ $\Omega_1 > 0,09$, и каждой точкѣ отклоненія, въ которой $\Omega_1 - \varepsilon_n(x) T(x) < 0$, соотвѣтствуетъ отрицательный минимумъ Ω_1, гдѣ $\Omega_1 < -0,09$. Съ точкой 0 число этихъ максимумовъ и минимумовъ составитъ $n+1$, откуда слѣдуетъ, что другихъ максимумовъ и минимумовъ у многочлена Ω_1 быть не можетъ.

Допустимъ далѣе, что Ω_1 имѣлъ бы отрицательный максимумъ при $x=0$; въ такомъ случаѣ уравненіе

$$\Omega_1 = 0$$

имѣло бы не болѣе $(n-1)$ положительныхъ корней; въ промежуткѣ между 0 и наименьшимъ корнемъ a_1 уравненія $\Omega_1 = 0$ должно было бы быть по крайней мѣрѣ двѣ точки отклоненія (кромѣ 0), такъ какъ между двумя точками отклоненія, лежащими вправо отъ a_1, $\Omega_1 = 0$ имѣетъ не менѣе одного корня.

Слѣдовательно, $\Omega_1 < 0$ во второй точкѣ отклоненія x_1, а потому

$$\varepsilon_n(x_1) \cdot T(x_1) < -0,27,$$

откуда заключаемъ, что $x_1 < \frac{\pi}{6n}$.

Пусть, съ другой стороны,

$$m = -1 + \lambda_n - h$$

будетъ значеніе минимума Ω_1 вблизи 0; въ такомъ случаѣ полное измѣненіе (variation totale) многочлена Ω_1, когда x, измѣняясь отъ 0 до x_1, проходитъ сначала черезъ точку, гдѣ Ω_1 минимумъ, а затѣмъ черезъ первую точку отклоненія x_0, будетъ болѣе, чѣмъ

$$2h + 2\lambda_n > 2h + 0,54.$$

Но, подобно предыдущему, мы замѣчаемъ, что

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < (1,2 + h)n, \tag{63bis}$$

такъ какъ

$$-1+\lambda_n-h\leqq \Omega_1<\lambda_n+0{,}18.$$

Поэтому, x_1 долженъ былъ бы удовлетворять неравенству

$$x_1(1{,}2+h)n>2h+0{,}54;$$

и тѣмъ болѣе,

$$\frac{\pi}{6}(1{,}2+h)>2h+0{,}54,$$

откуда

$$h<0{,}06.$$

Но въ такомъ случаѣ, $\varepsilon_n(x_0).T(x_0)>-1+2\lambda_n-h>-0{,}52$, т. е. $x_0>\frac{0{,}15\pi}{2n}$, откуда $x_1-x_0<\frac{0{,}2\pi}{2n}$, что противорѣчитъ, какъ выше, неравенству (63^{bis}) слѣдовательно, Ω_1 не можетъ имѣть минимума вблизи 0, и предположеніе, что $\Omega_1(0)$ есть максимумъ, должно быть отброшено. Итакъ неравенство (65) доказано.

Такимъ образомъ *въ промежуткѣ* $(-1,+1)$ *многочленъ* $\Omega_1(x)$ *имѣетъ* $(2n+1)$ *максимумовъ и минимумовъ; при этомъ, если* $n|x|>A$, *то эти максимумы и минимумы равны* λ_n *по абсолютному значенію; остальные же заключены между* $3\lambda_n$ и $\frac{1}{4}\lambda_n$, какъ это видно изъ неравенствъ (65).

Вслѣдствіе этого, всѣ корни уравненія

$$\Omega_1^2(x)-\lambda_n^2=0 \tag{66}$$

и уравненія

$$\left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2(x^2-1)=0 \tag{67}$$

большіе, по абсолютному значенію, чѣмъ $\frac{A}{n}$, будутъ общіе. Кромѣ того, всѣ остальные корни уравненія (67) также вещественны, и, для опредѣленности, разсматривая лишь положительные корни, заключены между положительными корнями $\beta_1<\ldots<\beta_k$ уравненія $\Omega_1(x)=0$, гдѣ β_k наибольшій изъ корней $\Omega_1(x)=0$, который не болѣе $\frac{A}{n}$. Уравненіе (66) также имѣетъ по два вещественныхъ корня между β_i и β_{i+1}, если максимумъ (или минимумъ) Ω_1, заключенный между β_i и β_{i+1}, по абсолютному значенію не менѣе λ_n.

Случай, когда соотвѣтствующій максимумъ (или минимумъ) менѣе λ_n, приводитъ къ комплекснымъ корнямъ уравненія (66), относительно которыхъ докажемъ слѣдующее:

Внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$, высота которой равна $\frac{4}{n}$, и которая имѣетъ боковыми сторонами прямыя β_iD и $\beta_{i+1}C$, образующія съ основаніемъ $\beta_i\beta_{i+1}$ внутренніе углы $D\beta_i\beta_{i+1}$ и $\beta_i\beta_{i+1}C$ равные $\frac{3\pi}{2}$, есть по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія (66).

Въ самомъ дѣлѣ, на всякой линіи, соединяющей сторону β_iD съ $\beta_{i+1}C$ должно быть не менѣе одной точки, гдѣ мнимая часть $\Omega_1(x)$ обращается въ нуль, такъ какъ приращеніе аргумента Ω_1 при переходѣ отъ какой нибудь точки на сторонѣ $\beta_{i+1}C$ къ точкѣ, расположенной на β_iD, болѣе π. Такимъ образомъ, кривая S, на которой мнимая часть Ω_1 равна нулю, исходя изъ точки γ_i, расположенной между β_i и β_{i+1}, гдѣ $\frac{d\Omega_1}{dx}=0$, будетъ пересѣкать всякую прямую параллельную CD; и, такъ какъ внутри разсматриваемой трапеціи кривая S не можетъ имѣть двойной точки (потому что всѣ корни $\frac{d\Omega_1}{dx}=0$ вещественные), то вещественная часть Ω_1 будетъ итти, возрастая по абсолютному значенію, если слѣдовать по кривой S отъ точки γ_i до первой точки H пересѣченія S со стороной CD. Поэтому для того, чтобъ убѣдиться, что внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$ есть корень уравненія (66), достаточно будетъ доказать, что въ точкѣ H

$$\mu^2=\Omega_1^2(H)>\lambda_n^2.$$

Для этого, беремъ многочленъ $T(x)=\cos 2n \arccos x$; его аргументъ въ точкѣ H обозначимъ буквой φ, и допустимъ, напримѣръ, для опредѣленности, что $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$. Затѣмъ изъ точки H проведемъ прямую, параллельную β_iD, до пересѣченія съ вещественной осью въ точкѣ E; пусть x_0 будетъ наибольшій корень уравненія $T(x)=0$, меньшій, чѣмъ E; соединимъ x_0 съ H, и перпендикулярно къ x_0H проведемъ изъ H прямую до пересѣченія съ вещественной осью въ точкѣ E'; въ такомъ случаѣ между E' и x_0 можно выбрать точку y_0 такъ, чтобъ дробь

$$\frac{H-y_0}{H-x_0}$$

имѣла аргументомъ $-\varphi$; при этомъ, модуль этой дроби будетъ не менѣе, чѣмъ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Поэтому произведеніе

$$\frac{H-y_0}{H-x_0}.\cos 2n \arcsin H$$

будетъ вещественнымъ [1]). Но, полагая $0 < \Theta < 1$, можемъ написать

$$H = \frac{\Theta A}{n} + \frac{4i}{n} = \sin(a + bi) = a + bi - \frac{(a+bi)^3}{3!} + \ldots;$$

и слѣдовательно, отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ, получимъ

$$b = \frac{4}{n};$$

откуда, какъ въ § 7, находимъ

$$|\cos 2n \arcsin H| \geqq \frac{1}{2}(e^8 - e^{-8}) > \frac{1}{2}(e^8 - 1).$$

Поэтому уравненіе съ вещественными коэффиціентами,

$$\Omega_1(x) = \mu'' \cdot \frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x, \tag{68}$$

въ которомъ

$$\mu'' = \frac{H - x_0}{H - y_0} \cdot \frac{\mu}{\cos 2n \arcsin H} < \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1}\mu,$$

имѣетъ корень равный H.

Но не трудно замѣтить, съ другой стороны, что, если

$$\mu'' < \frac{\lambda_n}{84},$$

то уравненіе (68) не можетъ имѣть комплексныхъ корней.

Дѣйствительно,

$$\frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x = \cos 2n \arcsin x + \frac{x_0 - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x;$$

поэтому, при $-\frac{2A}{n} \leqq x \leqq \frac{2A}{n}$,

$$\left|\frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x\right| < 1 + 2n(x_0 - y_0) < 1 + 2n\left(\frac{8}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) < 21,$$

такъ какъ разность между двумя сосѣдними корнями уравненія $T(x) = 0$ менѣе $\frac{\pi}{2n}$;

---

[1]) Напоминаю, что $\cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$, если n четное число.

на остальной же части отрѣзка $(-1, +1)$, это неравенство тѣмъ болѣе соблюдено, такъ какъ $\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\right| < 2$.

Такимъ образомъ, если $\mu'' < \frac{\lambda_n}{4.21}$, многочленъ

$$\Omega_1(x) - \mu'' \frac{x-y_0}{x-x_0} \cos 2n \arcsin x$$

имѣетъ знакъ $\Omega_1(x)$ въ точкахъ, гдѣ $\Omega_1(x)$ достигаетъ максимума или минимума, и слѣдовательно, всѣ корни уравненія (68) вещественные.

Отсюда заключаемъ, что

$$\mu \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1} > \frac{\lambda_n}{84},$$

т. е.

$$\mu > \lambda_n.$$

Такимъ образомъ уравненіе (66) имѣетъ, дѣйствительно, одинъ корень внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$.

Слѣдовательно, если симметрично къ $\beta_i\beta_{i+1}CD$ построить трапецію $\beta_i\beta_{i+1}C'D'$, то внутри фигуры $\beta_iD'C'\beta_{i+1}CD$ будетъ всегда не менѣе двухъ комплексныхъ или вещественныхъ корней уравненія (66). Прибавляя еще корень уравненія (66), находящійся между 0 и β_1, замѣчаемъ, что другихъ корней, кромѣ этихъ (и равныхъ имъ, но съ обратнымъ знакомъ), уравненіе (66) имѣть не можетъ.

Такимъ образомъ,

$$4n^2 . [\Omega_1^2(x) - \lambda_n^2] = \left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 . (x^2 - 1) . Y(x), \tag{69}$$

гдѣ

$$Y(x) = \frac{(x^2 - \eta_0^2)[x^2 - (\beta_1 + \eta_1)^2][x^2 - (\beta_1 + \eta_2)^2] \ldots [x^2 - (\beta_{k-1} + \eta_{2k-2})^2]}{x^2[x^2 - (\beta_1 + \varepsilon_1)^2]^2 \ldots [x^2 - (\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1})^2]^2},$$

при чемъ, $|\varepsilon_i| < \beta_{i+1} - \beta_i$, и $|\eta_{2i-1}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$, $|\eta_{2i}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$.

Слѣдовательно,

$$Y(x) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\beta_1 + \eta_1}{x}\right)^2\right] \ldots \left[1 - \left(\frac{\beta_{k-1} + \eta_{2k-2}}{x}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\beta_1 + \varepsilon_1}{x}\right)^2\right]^2 \ldots \left[1 - \left(\frac{\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1}}{x}\right)^2\right]^2} =$$

$$=\left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1+\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}+\Theta_1\left(\frac{\beta_2}{nx}\right)^4\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}^2-\eta_{2k-2}^2}{x^2}+\Theta_{2k-2}\cdot\left(\frac{\beta_k}{nx}\right)^4\right],$$

гдѣ $|\Theta_i|<3$, если $|nx|\geqq 2A$.

Поэтому
$$Y(x)=1+h(1+\varphi),$$

гдѣ
$$|h|<\left|\frac{\eta_0}{x}\right|^2+\left|\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}\right|+\ldots+\left|\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}^2-\eta_{2k-2}^2}{x^2}\right|+$$

$$+6\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{nx}\right)^4,$$

при чемъ φ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h.

Но не трудно указать такое опредѣленное число p, чтобы, при всякомъ i,

$$\beta_{i+1}-\beta_i>\frac{p}{n};$$

а потому можно также указать вполнѣ опредѣленное число l такъ, чтобы

$$|h|<\frac{t}{x^2}[\beta_1^2+\beta_2(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\beta_k(\beta_k-\beta_{k-1})]+\frac{t}{n^3x^4}[\beta_2^4(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\beta_k^4(\beta_k-\beta_{k-1})]<$$

$$<\frac{t}{x^2}\beta_k^2+\frac{t}{n^3x^4}\beta_k^5\leqq\frac{t}{x^2}\left[\frac{A^2}{n^2}+\frac{A^5}{n^8x^2}\right]<2l\left(\frac{A}{nx}\right)^2,$$

если $|nx|\geqq 2A$.

Итакъ, полагая $Y(x)=1+2l\left(\frac{A}{nx}\right)^2$, мы видимъ, что, если $\frac{A}{nx}$ стремится къ нулю, то $|l|$ остается менѣе нѣкотораго опредѣленнаго предѣла.

Но изъ уравненія (69) получаемъ

$$\frac{d\Omega_1}{2n\sqrt{\lambda_n^2-\Omega_1^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A}{nx}\right)^2\right].$$

Слѣдовательно,
$$\arccos\frac{\Omega_1(x)}{\pm\lambda_n}=2n\int_x^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A}{nx}\right)^2\right],$$

и, принимая во вниманіе, что n четное число, передъ λ_n надо взять знакъ —; откуда

$$\arccos \frac{\Omega_1(x)}{-\lambda_n} = 2n(1+\varepsilon)\arccos x,$$

гдѣ

$$|\varepsilon| < l\left(\frac{A}{nx}\right)^2.$$

Поэтому

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n(1+\varepsilon)\arccos x. \qquad (60^{\text{bis}})$$

Но $n\varepsilon$ стремится къ нулю, если $\frac{A^2}{nx^2}$ стремится къ нулю; для этого достаточно (послѣ того какъ число A опредѣлено), чтобъ nx^2 возрастало безконечно. Такимъ образомъ

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n \arccos x + 2\beta'_n(x),$$

гдѣ $\beta'_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно; и, принимая, что $\lambda_n - 2nE_{2n}$ стремится къ нулю,

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x); \qquad (60)$$

слѣдовательно, многочленъ $P(x)$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$Q(x) = R(x) + \left[\frac{1}{2n} - E_{2n}\right].T(x) + \frac{\beta_n(x)}{n}, \qquad (70)$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно. Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что формула (70), которая, для опредѣленности, доказана, при предположеніи, что n четное число, справедлива для всѣхъ значеній n, если положить $T(x) = (-1)^n \cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$.

57. Теорема. *При безконечномъ возрастаніи n, произведеніе $2n.E_{2n}$ стремится къ вполнѣ опредѣленному предѣлу λ.*

Пусть многочленъ $\Omega(x)$ степени $2n$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$\Omega_1^{(n)}(x) = -\lambda_n \cos 2n \arcsin x + 2\beta_n(x);$$

требуется показать, что λ_n не зависитъ отъ n.

Наше утвержденіе будетъ, очевидно, доказано, если мы убѣдимся, что многочленъ степени $2kn$,

$$\Omega_1^{(kn)}(x) = -\lambda_n \cos 2kn \arcsin x + 2\beta_n(kx),$$

гдѣ k произвольное цѣлое число, служитъ асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена $\Omega(x)$ степени $2kn$, такъ какъ изъ этого можно будетъ заключить, что $\lambda_{kn} = \lambda_n$.

Возьмемъ, для опредѣленности, $k=2$, и обозначимъ черезъ x_1, $x_2, \ldots x_k$, точки отклоненія (кромѣ 0) $\Omega_1^{(n)}(x)$ отъ $\delta_n(x)$, отстоящія не далѣе отъ 0, чѣмъ $\sqrt{\frac{A}{n}}$, гдѣ A нѣкоторое данное весьма большое число, которое однако обладаетъ свойствомъ, что $n\left(\sqrt{\frac{A}{n}}\right)^3 = \sqrt{\frac{A^3}{n}} = \gamma$ есть число весьма малое. Въ такомъ случаѣ, въ точкахъ $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2}x_k$ отклоненіе $\Omega_1^{(2n)}$ отъ $\delta_{2n}(x)$ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ $\pm\lambda_n$, такъ какъ, для разсматриваемыхъ значеній $\frac{x_i}{2}$,

$$\Omega_1^{(2n)}\left(\frac{x_i}{2}\right) = -\lambda_n \cos 4n \arcsin\frac{x_i}{2} + 2\beta_n(x_i) = -\lambda_n \cos 2n\left(x_i + \frac{\Theta x_i^3}{3}\right) +$$

$$+ 2\beta_n(x_i) = \Omega_1^{(n)}(x_i) + \theta'\gamma,$$

гдѣ $|\Theta| < 1$, $|\theta'| < 1$; и съ другой стороны, вообще,

$$\left|\delta_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) - \delta_n(x)\right| < \gamma,$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n.

Но, вслѣдствіе предыдущей теоремы, x_h и всѣ слѣдующія за x_h точки отклоненія: x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots$ и т. д. $\Omega_1^{(n)}$ отъ δ_n, должны опредѣляться формулами

$$\arcsin x_h = \frac{\pi(k_1 + \alpha_0)}{2n}, \ \arcsin x_{h+1} = \frac{\pi(k_1 + 1 + \alpha_1)}{2n}, \ldots,$$

$$\arcsin x_{h+i} = \frac{\pi(k_1 + i + \alpha_i)}{2n}, \ldots, \arcsin x_{n+1} = \frac{\pi n}{2n} = \frac{\pi}{2},$$

гдѣ α_i сколь угодно малыя величины (если A взято достаточно большимъ), такъ какъ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю. Такимъ образомъ $k_1 = h - 1$.

Слѣдовательно, полагая

$$\arcsin x_{h+i+1}^1 = \frac{\pi(h+i)}{4n}, \qquad (i=0, 1, \ldots 2n-h)$$

мы замѣчаемъ, что въ точкахъ x_{h+i+1}^1 разность $\Omega_1^{(2n)}(x) - \delta_{2n}(x)$, последовательно мѣняя знакъ, безконечно мало отличается отъ $\pm\lambda_n$. Вмѣстѣ съ 0 и съ предшествующими h точками $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots \frac{x_h}{2}\right)$ это составляетъ $2n+2$ точки на отрѣзкѣ 01, гдѣ означенная разность получаетъ, послѣдовательно мѣняя знакъ, значенія, сколь угодно мало отличающіяся отъ λ_n, а потому наименьшее уклоненіе многочлена степени $4n$ отъ δ_{2n} безконечно мало отличается отъ λ_n.

Слѣдовательно, $\Omega_1^{(2n)}$ является асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена, наименѣе уклоняющагося отъ δ_{2n}, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Мы можемъ теперь придать другую форму неравенству (59), а именно

$$0{,}32 > \lambda > 0{,}27. \qquad (59^{bis})$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что для полученія болѣе тѣсныхъ границъ для λ, можно будетъ послѣдовательно усовершенствовать пріемы § 52 и 53.

Вмѣсто одного добавочнаго члена вида $\frac{T(x)}{4n^3}\cdot\frac{\pi^2 a}{x^2-\sin^2\frac{\pi}{4n}}$, который мы ввели въ § 52, достаточно будетъ ввести нѣсколько членовъ вида $\frac{T(x)}{4n^3}\cdot\frac{\pi^2 a_i}{x^2-\sin^2\frac{\pi i}{4n}}$ $(i=1,\ 2,\ldots)$, чтобъ получить значеніе λ, съ сколь угодно большой точностью.

Точно также, примѣняя методъ § 53, надо будетъ вмѣсто одного произвольнаго значенія β, оставить неопредѣленными нѣсколько, i_0, точекъ отклоненія, сохранивши точки $\pm\sin\frac{i\pi}{2n}$ для $i\geqq i_0$.

Я полагаю, что, примѣняя любой изъ указанныхъ методовъ, достаточно будетъ ввести одинъ добавочный членъ, чтобъ уменьшить до 0,01 разность между границами для λ.

✝

5 (18) іюля 1912 г. скоропостижно скончался въ Парижѣ почетный членъ Харьковскаго Математическаго Общества профессоръ Сорбонны академикъ

Анри Пуанкаре.

Весь ученый міръ оплакиваетъ безвременную утрату одного изъ величайшихъ математическихъ геніевъ всѣхъ временъ и народовъ.

ГЛАВА V.

Различныя приложенія основныхъ теоремъ. Обобщенія теоремы Вейерштрасса.

58. Теорема. *Если производныя $(n+1)$-го порядка двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяютъ въ промежуткѣ AB неравенствамъ*

$$0 < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то наименьшія уклоненія $E_n[f(x)]$ и $E_n[\varphi(x)]$ разсматриваемыхъ функцій отъ многочленовъ степени n на отрѣзкѣ AB удовлетворяютъ неравенству

$$E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, составляя функцію

$$F(x,\ \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x,\ \lambda),$$

гдѣ $P(x,\ \lambda)$ многочленъ степени n, наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$ на отрѣзкѣ AB, мы видимъ, что при всякомъ λ расположеніе точекъ уклоненія будетъ перваго рода, и во внутреннихъ точкахъ уклоненія $F''_{x^2} \gtreqless 0$, такъ какъ на всемъ отрѣзкѣ

$$\frac{\partial^{n+1} F(x,\ \lambda)}{\partial x^{n+1}} = \lambda f^{(n+1)}(x) + (1-\lambda)\varphi^{(n+1)}(x) > 0,$$

и слѣдовательно, $F'_x = 0$ имѣетъ не болѣе n корней.

Такимъ образомъ мы вправѣ примѣнять теорему (36), и замѣчаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ послѣдней точкѣ уклоненія $F > 0$, т. е. $F = L$. Но уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = f - \varphi - P'_\lambda = 0$$

имѣетъ $(n+1)$ корней, такъ какъ

$$\frac{\partial^{n+2} F}{\partial \lambda \partial x^{n+1}} = f^{(n+1)} - \varphi^{(n+1)} < 0;$$

при этомъ, въ послѣдней точкѣ отклоненія

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} < 0.$$

Слѣдовательно,

$$L(1) = E_n[f(x)] < L(0) = E_n[\varphi(x)],$$

ч. и. т. д.

59. Слѣдствія. A. *Если въ промежуткѣ* AB

$$0 < \psi^{(n+1)}(x) < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[\psi(x)] < E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

B. *Если въ промежуткѣ* AB

$$|f^{(n+1)}(x)| < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$0 < \varphi^{(n+1)}(x) \pm f^{(n+1)}(x) < 2\varphi^{(n+1)}(x);$$

поэтому

$$E_n[\varphi + f] < 2E_n[\varphi], \quad E_n[\varphi - f] < 2E_n[\varphi],$$

и слѣдовательно, тѣмъ болѣе,

$$E_n[f] = E_n\left[\frac{f + \varphi + f - \varphi}{2}\right] < 2E_n[\varphi].$$

C. *Если въ промежуткѣ* AB, *длина котораго* $2h$,

$$0 < N < f^{(n+1)}(x) < M,$$

то

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи слѣдствія (A),

$$E_n\left[\frac{Nx^{n+1}}{(n+1)!}\right] < E_n[f(x)] < E_n\left[\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}\right];$$

а потому, замѣчая, что

$$E_n[Ax^{n+1}] = 2A\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

получаемъ

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

D. *Если въ промежуткѣ AB длины $2h$*

$$|f^{(n+1)}(x)| < M,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{4M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

E. *Если въ промежуткѣ AB*

$$f^{(n+1)}(x) > k\,|f^{(n+2)}(x)|,$$

то

$$2E_n[f(x)] > kE_n[f'(x)];$$

если же

$$|f^{(n+1)}(x)| < kf^{(n+2)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2kE_n[f'(x)].$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

F. *Если въ промежуткѣ $AB (x \geqq 0)$*

$$f^{(n+1)}(x) > 0, \quad f^{(n+2)}(x) > 0,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{1}{n+1} E_n[xf'(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\varphi(x) = \frac{xf'(x)}{n+1},$$

находимъ

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{xf^{(n+2)}(x)}{n+1} + f^{(n+1)}(x) > f^{(n+1)}(x) > 0.$$

60. Примѣры. Предыдущіе результаты, получаемые при помощи общаго метода, если ограничиваться только первымъ членомъ соотвѣтствующей строки Тэйлора, въ нѣкоторыхъ случаяхъ даютъ довольно тѣсныя границы для наилучшаго приближенія E_n.

Разсмотримъ, напримѣръ, наилучшее на отрѣзкѣ ab приближеніе $E_n(e^x)$ функціи e^x при помощи многочлена степени n. Примѣняя слѣдствіе C, находимъ немедленно

$$\frac{2e^a}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n(e^x) < \frac{2e^b}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Въ частности, на отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\frac{e^{-1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < E_n(e^x) < \frac{e}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Разсмотримъ еще наилучшее приближеніе функціи $\sin x$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$, гдѣ $h < \frac{\pi}{2}$, при помощи многочленовъ степени $2m$ или $2m-1$ (нетрудно видѣть, что такъ какъ $\sin x$ есть нечетная функція, многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ $\sin x$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$, будутъ также нечетными функціями). На основаніи того же слѣдствія C, получимъ

$$\frac{2\cos h}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1};$$

напримѣръ, если $h = \frac{\pi}{3}$, то

$$\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, наилучшее приближеніе $E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$, гдѣ $b > 0$ и $\alpha > 0$, на отрѣзкѣ 01.

Полагая $f(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$ и $\varphi(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h}$,

находимъ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+n+1},$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(\alpha+h)(\alpha+h+1)\ldots(\alpha+h+n)\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h+n+1},$$

откуда

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)} \cdot (b+x)^h \varphi^{(n+1)}(x).$$

Поэтому, примѣняя слѣдствіе (A), получимъ

$$\frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)} \cdot b^h E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h} < E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha,$$

$$E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha < \frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)}(b+1)^h E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h};$$

полагая $h > 0$.

Въ частности, если $h=1$, то

$$\frac{\alpha+n+1}{\alpha}.b.E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+1} < E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha} < \frac{\alpha+n+1}{\alpha}.(b+1).E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+1}$$

Упражненіе. Показать, при помощи слѣдствія (C), что на отрѣзкѣ 01

$$E_n(x^{n+1+h}) < 2\frac{(n+1+1)\dots(1+h)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

если $h<0$.

60. Примѣненіе теоремы de la Vallée Poussin. Мы можемъ получить нижнюю границу $E_n(f(x))$ на отрѣзкѣ $(-1,+1)$, примѣняя неравенство (30), т. е. беря первые два члена строки Тэйлора, представляющей многочленъ степени n, наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x)+(1-\lambda)\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)=x^{n+1}$.

На основаніи примѣчанія къ § 39, эти первые два члена строки Тэйлора представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ многочленъ $Q(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$ въ $(n+2)$ точкахъ x_i, гдѣ разность $|\varphi(x)-P_n(x)|$ достигаетъ максимума (обозначая черезъ $P_n(x)$ многочленъ степени n наименѣе уклоняющійся отъ $\varphi(x)$). Въ данномъ случаѣ, $\varphi(x)=x^{n+1}$, поэтому $x_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}$.

Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots$$

имѣетъ радіусъ сходимости $R>1$.

Многочленъ $Q(x)$ степени n удовлетворяетъ $(n+2)$ уравненіямъ

$$Q(x_i)=f(x_i)+(-1)^i\varrho,$$

причемъ $|\varrho|$, какъ мы видѣли, является нижней границей для $E_n[f(x)]$. Примѣняя формулу интерполированія Лагранжа, находимъ

$$Q(x)=S(x)\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)+(-1)^i\varrho}{(x-x_i)S'(x_i)},$$

гдѣ $S(x)=\sqrt{1-x^2}\sin(n+1)\arccos x$.

Такъ какъ степень $Q(x)$ не выше n, то

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)+(-1)^i\varrho}{S'(x_i)}=0;$$

откуда, вслѣдствіе [1]) равенства $\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{(-1)^i}{S'(x_i)}=\pm 1$, получаемъ

$$\varrho=\pm\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}.$$

Но

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(x)dx}{S(x)},$$

гдѣ C какой нибудь контуръ, окружающій отрѣзокъ $(-1,+1)$, но не заключающій ни одной особой точки функціи $f(x)$.

Поэтому, замѣчая, что

$$S(x)=\sqrt{1-x^2}\,.\sin(n+1)\arccos x=-2^n\Big[x^{n+2}-\frac{n+3}{2^2}x^n+$$

$$+\frac{n^2+3n-2}{2^4.2!}x^{n-2}-\frac{(n-3)(n^2+3n-4)}{2^6.3!}x^{n-4}+$$

$$+\frac{(n-4)(n-5)(n^2+3n-6)}{2^8.4!}x^{n-6}-\dots\Big],$$

получаемъ

$$-\frac{1}{S(x)}=\frac{1}{2^n}\Big[\frac{1}{x^{n+2}}+\frac{n+3}{2^2}\frac{1}{x^{n+4}}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}\frac{1}{x^{n+6}}+$$

$$+\frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{2^6.3!}\frac{1}{x^{n+8}}+\dots\Big];$$

и слѣдовательно,

$$\pm\varrho=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots)}{2^n}\cdot\left[\frac{1}{x^{n+2}}+\frac{n+3}{2^2}\cdot\frac{1}{x^{n+4}}+\dots\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left[a_{n+1}+\frac{n+3}{2^2}\,.a_{n+3}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}a_{n+5}+\dots\right].$$

Такимъ образомъ, на отрѣзкѣ $(-1,+1)$

$$E_n[f(x)]>\frac{1}{2^n}\left|a_{n+1}+\frac{n+3}{2^2}a_{n+3}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}a_{n+5}+\dots\right|.\quad(71)$$

Въ частности, на отрѣзкѣ $(-1,+1)$ имѣемъ

---

[1]) См. § 46.

$$\left.\begin{aligned}
&E_n[x^{n+3}] = E_{n-1}[x^{n+3}] > \frac{n+3}{2^{n+2}},\\
&E_n[x^{n+5}] = E_{n-1}[x^{n+5}] > \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4}2!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_n[x^{n+2k+1}] = E_{n-1}[x^{n+2k+1}] > \frac{(n+k+2)\dots(n+2k+1)}{2^{n+2k}k!}
\end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

61. Преобразованіе строкъ Тэйлора въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Изъ тождества

$$(\cos t)^m = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\Big[\cos mt + m\cos(m-2)t + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-l+1)}{l!}\cos(m-2l)t + \dots$$

выводимъ, полагая $x = \cos t$ и $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$x^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[T_m(x) + mT_{m-2}(x) + \frac{m(m-1)}{2!}T_{m-4}(x) + \dots\right]; \qquad (73)$$

и слѣдовательно,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots =$$

$$\left.\begin{aligned}
&= a_0 + \frac{2}{2^2}a_2 + \frac{4.3}{2^4.2!}a_4 + \dots + \frac{2l(2l-1)\dots(l+1)}{2^{2l}.l!}a_{2l} + \dots\\
&+ T_1(x)\left[a_1 + \frac{3}{2^2}a_3 + \frac{5.4}{2^4.2!}a_5 + \dots + \frac{(2l+1)\dots(l+2)}{2^{2l}.l!}a_{2l+1} + \dots\right] +\\
&+ T_2(x)\left[\frac{a_2}{2} + \frac{4}{2^3}a_4 + \frac{6.5}{2^5.2!}a_6 + \dots + \frac{(2l+2)(2l+1)\dots(l+3)}{2^{2l+1}l!}a_{2l+2} + \dots\right] +\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ T_n(x)\left[\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^{n+1}}a_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{2^{n+3}.2!}a_{n+4} + \dots \frac{(2l+n)\dots(l+n+1)}{2^{2l+n-1}.l!}a_{2l+n} + \dots\right]\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} (74)$$

Въ частности, изъ формулы (73) видно, что

$$\left.\begin{aligned}
&E_n(x^{n+3}) = E_{n-1}(x^{n+3}) < \frac{n+3}{2^{n+2}}\left[1 + \frac{1}{n+3}\right],\\
&E_n(x^{n+5}) = E^{n-1}(x^{n+5}) < \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4}.2!}\left[1 + \frac{2}{n+4} + \frac{2.1}{(n+4)(n+5)}\right]\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_n(x^{n+2k+1}) = E_{n-1}(x^{n+2k+1}) < \frac{(n+2k+1)\dots(n+k+2)}{2^{n+2k}.k!}\Big[1 +\\
&\qquad + \frac{k}{n+k+2} + \frac{k(k-1)}{(n+k+2)(n+k+3)} + \dots\Big].
\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Сопоставленіе неравенствъ (72) съ неравенствами (75) показываетъ, что каково бы ни было *опредѣленное* цѣлое число k, на отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{E_n(x^{n+2k+1}) \cdot 2^{n+2k} \cdot k!}{(n+k+2)(n+k+3)\ldots(n+2k+1)} = 1. \tag{76}$$

Вообще, полагая

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n}\left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 2!} a_{n+5} + \ldots\right],$$

замѣчаемъ, что остатокъ, получаемый, если отбросить въ разложеніи (74) члены степени выше n, не болѣе, чѣмъ

$$|\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \ldots;$$

поэтому

$$|\lambda_n| < E_n[f(x)] < |\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \ldots \tag{77}$$

(первое изъ неравенствъ (77) есть ничто иное, какъ неравенство (71)).

62. Слѣдствія. А. *Если* $\dfrac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \ldots}{\lambda_n}$ *стремится къ нулю, при* $n = \infty$, *то на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{E_n[f(x)]}{\lambda_n} = 1.$$

В. *На отрѣзкѣ* $(-h, +h)$

$$\text{пред.}_{n=\infty} \frac{E_n(e^x) \cdot 2^n (n+1)!}{h^{n+1}} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $E_n(e^x)$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$ равно $E_n(e^{hx})$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Но

$$e^{hx} = \Sigma \frac{h^n x^n}{n!},$$

поэтому

$$\lambda_n = \frac{h^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot (n+2)(n+3)}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{h^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!}[1 + \varepsilon_n],$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю при $n = \infty$; и слѣдовательно, $\dfrac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \ldots}{\lambda_n}$ также стремится къ нулю.

С. *На отрѣзкѣ* $(-h, +h)$

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}} \frac{E_{2k}(\sin x)\,.\,2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = \text{пред.} \frac{E_{2k-1}(\sin x)\,.\,2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = 1,$$

и

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}} \frac{E_{2k}(\cos x)\,.\,2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = \text{пред.} \frac{E_{2k+1}(\cos x)\,.\,2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = 1\,.$$

Доказательство подобно предыдущему [1]).

D. *Если*

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{a_n}{R^n} = 1,$$

то на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, *при* n *достаточно большомъ*,

$$\frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) < E_n[f(x)] < \frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right),$$

гдѣ F *означаетъ гипергеометрическую функцію.*

Для простоты письма, положимъ $a_n = R^n$ (что соотвѣтствуетъ $f(x) = \frac{1}{1-Rx}\Big)$. Въ такомъ случаѣ,

$$\lambda_n = \frac{R^{n+1}}{2^n}\left[1 + (n+3)\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{(n+4)(n+5)}{2!}\left(\frac{R}{2}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{3!}\left(\frac{R}{2}\right)^6 + \ldots\right] = \frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right);$$

и слѣдовательно,

$$\lambda_n + \lambda_{n+1} + \ldots = \frac{R^{n+1}}{2^n}\left[F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R}{2}\right) F\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2, n+3, R^2\right) + \ldots\right].$$

Но нетрудно убѣдиться, что

$$\frac{F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right)}{F\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2, n+3, R^2\right)} > \frac{1}{2},$$

---

[1]) Согласно терминологіи, предложенной въ добавленіи къ IV главѣ, преобразованіе § 61 приводитъ во всѣхъ этихъ случаяхъ къ асимптотическимъ выраженіямъ многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ разсматриваемыхъ функцій.

если замѣтить, что отношеніе $(p+1)$-го члена числителя къ $(p+1)$-му члену знаменателя равно

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+p+2)}{(n+2)\left(\frac{n}{2}+p+1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+p+2}{\left(\frac{n}{2}+p+1\right)}>\frac{1}{2};$$

слѣдовательно,

$$\lambda_n+\lambda_{n+1}+\ldots<\frac{R^{n+1}}{2^n}(1+R+R^2+\ldots).F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},n+2,R^2\right)=$$

$$=\frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},n+2,R^2\right);$$

а потому

$$\frac{R^{n+1}}{2^n}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},n+2,R^2\right)<E_n[f(x)]<$$

$$<\frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},n+2,R^2\right).$$

Интересно сравнить полученный результатъ съ теоремой (29). Не останавливаясь на этомъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію не аналитическихъ функцій.

62. Теорема Вейерштрасса. Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ неравенства

$$E_{2n}|x|<\frac{0{,}32}{2n}, \tag{54}$$

имѣющаго мѣсто на отрѣзкѣ $(-1,+1)$ для достаточно большихъ значеній n.

Хорошо извѣстно, что изъ того, что

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ E_n|x|=0,$$

вытекаетъ теорема Вейерштрасса, т. е.

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ E_n[f(x)]=0,$$

для какой угодно непрерывной функціи [1]) Я хочу замѣтить только, что при помощи формулъ, указанныхъ мной въ 1905 г. въ Bulletin de la

---

[1]) Не безполезно обратить вниманіе на то, что непрерывность функціи $f(x)$ есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобъ пред. $E_n[f(x)]=0$.

Société Mathématique de France, изъ неравенства (54) можно вывести въ нѣкоторыхъ случаяхъ довольно точную верхнюю границу для $E_{2n}[f(x)]$.

Пусть $f(x)$ будетъ непрерывная на отрѣзкѣ 01 функція, и пусть $y = f_n(x)$ будетъ уравненіемъ ломанной линіи, имѣющей вершинами точки на линіи $y = f(x)$, съ абсциссами $x_k = \frac{k}{n}\ (x = 0,\ 1, \dots n)$.

Упомянутыя мною формулы заключаются въ томъ, что

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n-1} A_k |x - x_k| + A + Bx,$$

гдѣ

$$A_k = \frac{n}{2}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2f\left(\frac{k}{n}\right)\right],$$

$$A = \frac{1}{2}\left[f(0) + nf\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)f(1)\right],$$

$$B = \frac{n}{2}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f(1) - f(0) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Замѣняя $|x - x_k|$ приближенными многочленами $f_{n,p}(x)$ степени p, получаемъ приближенный многочленъ степени p для $f_n(x)$ и заключаемъ, что, при p достаточно большомъ, ошибка $|f_{n,p}(x) - f_n(x)|$ и, тѣмъ болѣе, $E_p[f_n(x)]$ будетъ удовлетворять неравенству

$$E_p[f_n(x)] < \frac{0{,}32}{p} \sum_{k=1}^{k=n-1} |A_k|. \tag{78}$$

Ограничимся только разсмотрѣніемъ случая, когда функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Дини-Липшица, а именно, пусть

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\delta(h)}{|\log h|},$$

гдѣ $\delta(h)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h.

Въ такомъ случаѣ, очевидно,

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{2\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n};$$

и, съ другой стороны,

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{k=n-1} |A_k| < \frac{n^2}{p} \cdot \frac{\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n},$$

такъ какъ $|A_k| < \dfrac{n\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$. Поэтому, полагая $p = n^2$, находимъ

$$E_p[f(x)] < |f(x) - f_{n,p}| < 4{,}64\,\frac{\delta\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}{\log p}. \tag{79}$$

Аналогичное неравенство далъ Lebesgue въ цитированной выше работѣ изъ Annales de Toulouse. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія обобщеннаго условія Дини-Липшица, неравенство (79) соблюдается не для всѣхъ, но для безчисленнаго множества значеній p. Слѣдовательно, принимая во вниманіе результатъ § 27, находимъ, что *условіе необходимое и достаточное, чтобы функція $f(x)$ удовлетворяла обыкновенному условію Дини-Липшица заключается въ томъ, чтобы, при всякомъ $n > n_0$*, $\lim\limits_{n=\infty} E_n[f(x)].\log n = 0$; *условіе необходимое и достаточное, чтобы функція $f(x)$ удовлетворяла обобщенному условію Дини-Липшица, заключается въ томъ, чтобы, при безчисленномъ множествѣ значеній $n > n_0$*, пред. $E_n[f(x)]\log n = 0$.

64. Первое обобщеніе теоремы Вейерштрасса. *Если данъ безконечный рядъ чиселъ*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

обладающій свойствомъ, что $H < \alpha_i < K$, гдѣ H и K два независимыхъ отъ i положительныхъ числа, то для всякой непрерывной на отрѣзкѣ 01 функціи $f(x)$ можно составить сумму $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ такъ, чтобы на всемъ отрѣзкѣ

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i} \right| < \varepsilon,$$

какъ бы мало ни было число ε.

(Указаннымъ свойствомъ обладаютъ, напримѣръ, числа $\alpha_i = 1 - \dfrac{1}{2^i}$).

Наша теорема будетъ, очевидно, доказана, если мы покажемъ, что она справедлива для $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое число, большее, чѣмъ единица.

Для этого замѣчаемъ сначала, что, на основаніи разсужденія совершенно подобнаго доказательству теоремы (43), можно утверждать, что *наилучшее приближеніе x^p на отрѣзкѣ 01 при помощи суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ всегда меньше наилучшаго приближенія при помощи суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{i=n} B_i x^{\beta_i}$, если $p > \alpha_i > \beta_i > 0$.*

Съ другой стороны, полагая въ неравенствахъ (75) $x^2 = y$, выводимъ изъ нихъ, что на отрѣзкѣ 01

$$E_{m-1}(x^{m+k}) < \frac{(2m+2k)\ldots(2m+k+1)}{2^{2m+2k-1}k!}\left[1 + \frac{k}{2m+k+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)}{(2m+k+1)(2m+k+2)} + \ldots\right],$$

и, тѣмъ болѣе, обозначая черезъ $E'_n(x^p)$ наилучшее приближеніе x^p на отрѣзкѣ 01 при помощи суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^i$, имѣемъ

$$E'_n(x^p) < \frac{2p\ldots(p+n+2)}{2^{2p-2}(p-n-1)!}\left[1 + \frac{p-n-1}{p+n+2} + \frac{(p-n-1)(p-n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)}\ldots\right] =$$

$$= \mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_{n+2} + \ldots + \mathrm{I}_p\,,$$

гдѣ

$$\mathrm{I}_s = \frac{2p\ldots(p+s+1)}{2^{2p-2}(p-s)!} = \mathrm{I}_0\frac{p(p-1)\ldots(p-s+1)}{(p+1)\ldots(p+s)}.$$

Поэтому

$$\log \mathrm{I}_s = \log \mathrm{I}_0 + \log\frac{p(p-1)\ldots(p-s+1)}{(p+1)\ldots(p+s)} =$$

$$= \log \mathrm{I}_0 + \left[\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] + \ldots$$

$$+ \left[\log\left(1 - \frac{s-1}{p}\right) - \log\left(1 + \frac{s-1}{p}\right)\right] - \log\left(1 + \frac{s}{p}\right) <$$

$$< \log \mathrm{I}_0 - \frac{2}{p} - \frac{4}{p} - \ldots - \frac{2(s-1)}{p} - \frac{s}{p} + \frac{s^2}{2p^2} =$$

$$= \log \mathrm{I}_0 - \frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}.$$

Откуда

$$\mathrm{I}_s < \mathrm{I}_0 e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}} < \frac{4}{\sqrt{p\pi}} e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}},$$

такъ какъ

$$\mathrm{I}_0 = \frac{2p!}{2^{2p-2}(p!)^2} = \frac{1.3\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p}.4 < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}.$$

Но, при $p > 1$, $s > 0$,

$$e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{p}} + e^{-\frac{s^2}{p}}\right]. \tag{80}$$

Дѣйствительно, это неравенство равнозначно неравенству

$$e^{\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2}\left[e^{\frac{s}{p}-\frac{1}{4p}}+1\right],$$

или, полагая $u=\frac{s}{p}$, $\alpha=\frac{1}{4p}$, равнозначно неравенству

$$f(u)=2e^{\frac{u^2}{2}-u}-e^{-u}<e^{-\alpha},$$

справедливость котораго нужно, слѣдовательно, доказать при предположеніи, что $\alpha \leqq \frac{1}{8}$, $1 \geqq u \geqq 4\alpha$. Но нетрудно видѣть, что, при разсматриваемыхъ значеніяхъ u, $f''(u)>0$; поэтому наибольшее значеніе $f(u)$ будетъ равно $f(1)$ или $f(4\alpha)$, такъ что достаточно замѣтить, что, при $\alpha \leqq \frac{1}{8}$,

$$f(1)=2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}<e^{-\alpha} \quad \text{и} \quad f(4\alpha)=2e^{8\alpha^2-4\alpha}-e^{-4\alpha}<e^{-\alpha}.$$

Изъ неравенства (80) заключаемъ, что

$$e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}} < \int_{s-1}^{s} e^{-\frac{z^2}{p}}\,dz,$$

а потому

$$\mathrm{I}_s < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}\int_{s-1}^{s} e^{-\frac{z^2}{p}}\,dz = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{s-1}{\sqrt{p}}}^{\frac{s}{\sqrt{p}}} e^{-z^2}\,dz.$$

Слѣдовательно [1]), наконецъ,

---

[1]) Указанное здѣсь вычисленіе аналогично тому, которое я сдѣлалъ въ замѣткѣ „Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace" (Сообщ. Х. М. О. Т. XII n° 3) и приводитъ къ слѣдующему результату для теоріи вѣроятностей: *если вѣроятность событія равна* $\frac{1}{2}$, *то, при* $2p\,(p>1)$ *испытаніяхъ, вѣроятность, что число* m *появленій событія удовлетворяетъ неравенству* $|m-p| \leqq z_0\sqrt{p}$, *больше, чѣмъ* $\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z_0} e^{-z^2}dz$.

$$E'_n(x^p) < \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{n}{\sqrt{p}}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \tag{81}$$

Такимъ образомъ $E'_n(x^p)$ *стремится къ нулю, если* $\frac{n}{\sqrt{p}}$ *возрастаетъ безконечно.* Поэтому, въ частности $E'_n(x^{pn})$ стремится къ нулю, если, при данномъ p, n возрастаетъ безконечно. Но, полагая $x^n = y$, мы видимъ, что $E'_n(x^{pn})$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ наилучшее приближеніе функціи x^p при помощи суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} B_i x^{\frac{i}{n}}$ на томъ же отрѣзкѣ 01. Слѣдовательно, благодаря замѣчанію, сдѣланному въ началѣ доказательства, приближеніе x^p при помощи суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, такъ какъ (введя, если понадобится, перемѣнную x^k вмѣсто x) всегда можно предположить, что $1 \leqq H < \alpha_i$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрѣзкомъ AB на положительной оси; и кромѣ того, нетрудно убѣдиться, что, если отрѣзокъ AB не доходитъ до 0, то условіе, чтобы $H > 0$, $K > 0$, можетъ быть отброшено.

65. Второе обобщеніе теоремы Вейерштрасса. *Если показатели α_n возрастаютъ безконечно вмѣстѣ съ n, то наилучшее приближеніе непрерывной функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ 01 при помощи $\Sigma A_i x^{\alpha_i}$ стремится къ нулю, если $\frac{\alpha_n}{n \log n}$ стремится къ нулю; напротивъ, наилучшее приближеніе не можетъ стремиться къ нулю, если есть такое число ε, что $\alpha_n \geqq n(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $\alpha_n \geqq n(\log n)^2(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.*

Займемся сначала доказательствомъ первой части теоремы.

Достаточно будетъ разсмотрѣть случай, когда $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое положительное число, если брать только тѣ α_i, которые больше p, и, тѣмъ болѣе, достаточно будетъ доказать, что, какъ бы мало ни было число δ, возможно на всемъ отрѣзкѣ 01 удовлетворить неравенству

$$\left| x - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{\alpha_i - p + 1} \right| < \delta, \tag{82}$$

ибо, если это неравенство имѣетъ мѣсто, то, конечно,

$$\left| x^p - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{\alpha_i} \right| < \delta x^{p-1} \leqq \delta .$$

Пусть

$$a_n = \varepsilon_n n \log(n+1);$$

въ такомъ случаѣ, по предположенію, какъ бы мало ни было число γ, можно указать достаточно большое число n_0, чтобы, при $n \geqq n_0$, имѣть $\varepsilon_n < \gamma$.

На основаніи теоремы (43), неравенство (82) можетъ быть осуществленно, если извѣстно, что

$$\left| x - \sum_{h=1}^{h=n} B_h x^{\beta_h} \right| < \delta,$$

гдѣ

$$\beta_h > a_{i_0+h} - p + 1.$$

Положимъ $\beta_h = kh$; тогда

$$\left| x - \sum_{h=1}^{h=n} B_h x^{kh} \right| = \left| y^{\frac{1}{k}} - \sum_{h=1}^{h=n} B_h y^h \right|.$$

Мы увидимъ въ слѣдующей главѣ (и это вытекаетъ также изъ примѣчанія c къ теоремѣ (16)), что эта разность можетъ быть сдѣлана менѣе $\frac{b}{n^{1:k}}$, гдѣ b—независимая отъ n и k постоянная. Такимъ образомъ

$$\delta < \frac{b}{n^{1:k}},$$

если

$$k > \frac{a_{i_0+h} - p + 1}{h} = \frac{\varepsilon_{i_0+h}(i_0+h)\log(i_0+h) - p + 1}{h}. \tag{83}$$

Для значеній h, которыя меньше, чѣмъ i_0, и меньше, чѣмъ $n_0 - i_0$, неравенству (83) можно удовлетворить, взявши для k нѣкоторое вполнѣ опредѣленное число k_0; для остальныхъ же значеній h, неравенство будетъ соблюдено, если взять

$$k = 2\gamma \log 2n.$$

Можно предположить n настолько большимъ, что $2\gamma \log 2n > k_0$. Слѣдовательно,

$$\delta < \frac{b}{n^{\frac{1}{2\gamma \log 2n}}} = \frac{b}{e^{\frac{\log n}{2\gamma \log 2n}}} < b e^{-\frac{1}{4\gamma}};$$

поэтому δ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малой, и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы замѣчаемъ, что наилучшее приближеніе x на отрѣзкѣ 01 при помощи суммы [1] $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ (гдѣ $\alpha_i > 1$), β_n, удовлетворяетъ, при всякомъ положительномъ значеніи μ, неравенству

$$\beta_n > \beta_{n-1} \frac{(1+\mu)^{\alpha_{n-1}} - 1}{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}. \tag{84}$$

Дѣйствительно, изъ

$$|x + A_1 x^{\alpha_1} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n$$

заключаемъ, что и

$$\left| \frac{x}{1+\mu} + A_1 \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{\alpha_1} + \ldots + A_n \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{\alpha_n} \right| < \beta_n;$$

а потому

$$|x(1+\mu)^{\alpha_n - 1} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n (1+\mu)^{\alpha_n},$$

откуда

$$|x[(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1] + \ldots A'_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n [(1+\mu)^{\alpha_n} + 1],$$

и

$$|x + B_1 x^{\alpha_1} + \ldots + B_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

слѣдовательно,

$$\beta_{n-1} < \beta_n \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

или

$$\beta_n > \beta_{n-1} \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_{n-1}} - 1}{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}. \tag{84}$$

Изъ неравенства (84) получаемъ немедленно

$$\beta_n > \beta_{n_0} \cdot \prod_{i=n_0+1}^{i=n} \frac{(1+\delta_i)^{\alpha_{i-1}} - 1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i} + 1}, \tag{85}$$

гдѣ δ_i какія угодно положительныя числа. Достаточно теперь будетъ показать, что при соотвѣтствующемъ выборѣ чиселъ δ_i, произведеніе, стоящее во второй части неравенства, *не* стремится къ нулю, при $n = \infty$, если $\alpha_n \geqq n(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $\alpha_n \geqq n(\log n)^2 (\log\log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.

---

[1]) Если бы одно изъ чиселъ α_i было бы равно 1, то вмѣсто наилучшаго приближенія x можно было бы разсматривать наилучшее приближеніе x^p, гдѣ $p \gtreqless \alpha_i$.

Но

$$\frac{(1+\delta_i)^{\alpha_i-1}-1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}+1}=\frac{1}{1+\delta_i}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i-1}}}{1+\dfrac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}}.$$

Поэтому разсматриваемое произведеніе не можетъ стремиться къ нулю, если оба ряда

$$\Sigma\delta_i,\ \Sigma\frac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$$

будутъ сходящимися. Для сходимости перваго ряда, достаточно взять

$$\delta_n=\frac{2}{n(\log n)^{1+\varepsilon}},\quad \text{или}\quad \delta_n=\frac{2}{n\log n(\log\log n)^{1+\varepsilon}}\ \text{и т. д.};$$

возьмемъ, напримѣръ, первое изъ этихъ значеній. Въ такомъ случаѣ, и рядъ

$$\Sigma\frac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$$

будетъ сходящимся, если $\alpha_i \geqq i(\log i)^{2+\varepsilon}$.

Въ самомъ дѣлѣ, общій членъ этого ряда меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{\left[1+\dfrac{2}{i(\log i)^{1+\varepsilon}}\right]^{i(\log i)^{2+\varepsilon}}},$$

т. е., при i достаточно большомъ, меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{e^{2\log i}}=\frac{1}{i^2};$$

а потому рядъ $\Sigma\dfrac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$ сходящійся, и слѣдовательно, вторая часть теоремы доказана.

Примѣчаніе. Отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрѣзкомъ AB положительной оси.

Добавленіе къ главѣ V.

Разложеніе произвольныхъ функцій въ нормальные ряды.

66. **Нормальные ряды.** Нормальнымъ рядомъ на отрѣзкѣ 01 называется рядъ вида

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} A_{p,\,q} x^p (1-x)^q,$$

абсолютно и равномѣрно сходящійся на этомъ отрѣзкѣ. Въ моемъ сочиненіи «Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными 2-го порядка эллиптическаго типа» дано (во II главѣ) разложеніе въ нормальный рядъ, пригодное для всякой функціи, имѣющей непрерывную производную на отрѣзкѣ 01. Естественно задать себѣ вопросъ, можетъ ли совершенно произвольная непрерывная функція быть разложена въ нормальный рядъ.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ, какъ мы увидимъ далѣе, оказывается утвердительнымъ. А именно, мы укажемъ пріемъ для преобразованія произвольнаго, равномѣрно сходящагося ряда многочленовъ въ нормальный рядъ. Съ этой цѣлью разрѣшимъ предварительно слѣдующую алгебраическую задачу.

Задача. *Преобразовать многочленъ*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

въ выраженіе

$$P(x) = \sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} A_{p,\,q} x^p (1-x)^q,$$

гдѣ $m \geqq n$, *такъ, чтобы максимумъ суммы*

$$\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} |A_{p,\,q}| x^p (1-x)^q$$

на отрѣзкѣ 01 *былъ возможно малъ.*

Въ виду того, что число коэффиціентовъ $A_{p,\,q}$ ограничено, задача, очевидно, имѣетъ рѣшеніе, т. е. можно выбрать эти коэффиціенты такъ чтобъ максимумъ суммы

$$\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} |A_{p,q}| x^p (1-x)^q$$

достигалъ своего низшаго предѣла; этому минимальному значенію максимума мы для краткости дадимъ названіе *нормальнаго максимума степени m* даннаго многочлена на отрѣзкѣ 01.

Весьма замѣчательно, что поставленная задача разрѣшается совершенно элементарно, при чемъ обнаруживается интересный фактъ, что *нормальный максимумъ степени m любого многочлена $P(x)$ имѣетъ предѣломъ, при $m=\infty$, максимумъ $|P(x)|$ на данномъ отрѣзкѣ.* Искомое рѣшеніе вытекаетъ изъ простого замѣчанія: допустимъ, что задача рѣшена, и пусть выраженіе

$$P(x)=\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} a_{p,q} x^p (1-x)^q$$

есть одно изъ возможныхъ рѣшеній. Я говорю, что, если среди членовъ $a_{p,q}x^p(1-x)^q$ есть такіе, степень которыхъ $p+q=m-k$, гдѣ $k>0$, то рѣшеніемъ задача будетъ служить и то выраженіе, которое получится отъ замѣны $a_{p,q}x^p(1-x)^q$ суммой членовъ степени m,

$$a_{p,q}x^p(1-x)^q[x+(1-x)]^k=a_{p,q}[x^{p+k}(1-x)^q+kx^{p+k-1}(1-x)^{q+1}+\ldots x^p(1-x)^{q+k}].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|a_{p,q}|x^p(1-x)^q=|a_{p,q}|x^{q+k}(1-x)^q+|ka_{p,q}|x^{p+k-1}(1-x)^{q+1}+\ldots|a_{p,q}|x^p(1-x)^{q+k};$$

поэтому сумма модулей преобразованнаго выраженія не можетъ превысить суммы модулей даннаго выраженія.

Отсюда слѣдуетъ, что среди рѣшеній задачи всегда есть одно рѣшеніе, въ которомъ сумма показателей $p+q=m$. Другими словами, задача будетъ рѣшена, если представимъ $P(x)$ въ видѣ

$$P(x)=A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1}(1-x)+\ldots+A_0(1-x)^m.$$

Остается вычислить коэффиціенты A_i такъ, чтобы имѣть тождественно

$$A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}(1-x)+\ldots+A_0(1-x)^m=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Откуда находимъ для опредѣленія $(m+1)$ коэффиціента $(m+1)$ уравненіе

$$
\begin{aligned}
&A_0 = a_0,\\
&A_1 - mA_0 = a_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad (86)\\
&A_k - (m-k+1)A_{k-1} + \ldots + (-1)^k \frac{m(m-1\,.\,.(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,k} A_0 = a_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_m - A_{m-1}\ldots\ldots\ldots + (-1)_m A_0 = a_m,
\end{aligned}
$$

гдѣ $a_k = 0$, если $k > n$.

Рѣшеніе уравненій (86) не представляетъ труда и даетъ немедленно

$$
\begin{aligned}
&A_0 = a_0,\\
&A_1 = a_1 + ma_0,\\
&A_2 = a_2 + (m-1)a_1 + \frac{m(m-1)}{2} a_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_k = a_k + C^1_{m-k+1} a_{k-1} + \ldots + C^k_m a_0, \qquad\qquad (87)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_m = a_m + a_{m-1} + \ldots\ldots + a_0,
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$
C^k_m = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}.
$$

Итакъ поставленная задача рѣшена; *нормальный максимумъ степени m даннаго многочлена равенъ максимуму суммы*

$$
\sum_{k=0}^{k=m} |A_k| x^k (1-x)^{m-k},
$$

гдѣ коэффиціенты A_k опредѣляются формулами (87).

67. Изслѣдованіе величины нормальнаго максимума. Формулу, опредѣляющую A_k можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$
A_k = C^k_m\left[a_0 + \frac{C^{k-1}_{m-1}}{C^k_m} a_1 + \frac{C^{k-2}_{m-2}}{C^k_m} a_2 + \ldots\right] = C^k_m\left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \frac{k(k-1)}{m(m-1)} a_2 + \ldots\right] =
$$

$$
= C^k_m\left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2 \,.\, \frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} + \ldots + \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n \,.\, \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}\right].
$$

Изъ полученной формулы видно, что, при безконечномъ возрастаніи m,

$$\text{пред.}\frac{A_k}{C_m^k}=\text{пред.}\ \ P\left(\frac{k}{m}\right). \qquad (88)$$

Дѣйствительно, если k есть опредѣленное число, то всѣ члены суммы, состоящей изъ даннаго числа $n+1$ слагаемыхъ,

$$\frac{A_k}{C_m^k}=a_0+\frac{k}{m}a_1+\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}}+\ldots,$$

кромѣ a_0, стремятся къ нулю, поэтому

$$\text{пред.}\frac{A_k}{C_m^k}=a_0=P(0)=\text{пред.}\ \ P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Если же k также возрастаетъ безконечно, то

$$\text{пред.}\frac{A_k}{C_m^k}=\text{пред.}\left[a_0+a_1\frac{k}{m}+a_2\left(\frac{k}{m}\right)^2+\ldots+a_n\left(\frac{k}{m}\right)^n\right]=\text{пред.}\ P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Слѣдуетъ прибавить, что разность

$$\delta_k=\frac{A_k}{C_m^k}-P\left(\frac{k}{m}\right)$$

равномѣрно стремится къ нулю, при безконечномъ возрастаніи m.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\delta_k=\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\left[\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}}-1\right]+\ldots+\left(\frac{k}{m}\right)^n a_n\left[\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}-1\right];$$

поэтому

$$|\delta_k|<\left(\frac{k}{m}\right)^2|a_2|\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]+\ldots+\left(\frac{k}{m}\right)^n|a_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right]<$$

$$<\left(\frac{k}{m}\right)^2|a_2|\cdot\frac{1}{k}+\ldots\left(\frac{k}{m}\right)^n|a_n|\cdot\frac{(n-1)^2}{k}<\frac{B}{m},$$

гдѣ

$$B=|a_2|+4|a_3|+\ldots+(n-1)^2|a_n|;$$

итакъ

$$A_k=C_m^k\left[P\left(\frac{k}{m}\right)+\delta_k\right], \qquad (88^{\text{bis}})$$

гдѣ

$$|\delta_k|<\frac{B}{m}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{k=0}^{k=m}|A_k|x^k(1-x)^{m-k}=\sum_{k=0}^{k=m}\left|P\left(\frac{k}{m}\right)+\delta_k\right|C_m^k x^k(1-x)^{m-k}<$$

$$<\left(M+\frac{B}{m}\right)\sum_{k=0}^{k=m}C_m^k x^k(1-x)^{m-k}=\left(M+\frac{B}{m}\right)[x+(1-x)]^m=M+\frac{B}{m},$$

обозначая черезъ M максимумъ многочлена $P(x)$ на отрѣзкѣ 01. Такимъ образомъ обозначая черезъ M_m нормальный максимумъ степени m многочлена $P(x)$ на отрѣзкѣ 01, имѣемъ

$$M_m<M+\frac{B}{m}. \tag{89}$$

Слѣдствіе. *Если многочленъ $P(x)$ положителенъ на отрѣзкѣ 01, то, при m достаточно большомъ, всѣ коэффиціенты A_k положительны.*

68. Теорема. *Всякая непрерывная на отрѣзкѣ 01 функція разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы Вейерштрасса, всякую непрерывную функцію $f(x)$ можно представить въ видѣ равномѣрно сходящагося ряда многочленовъ

$$f(x)=Q_0(x)+Q_1(x)+\ldots+Q_s(x)+\ldots \tag{90}$$

Написанный рядъ можно будетъ преобразовать въ нормальный рядъ слѣдующимъ образомъ: соединяя вмѣстѣ, если это понадобится, по нѣсколько членовъ, рядъ (90) преобразуемъ въ рядъ

$$f(x)=\widetilde{P}_0(x)+P_1(x)+\ldots+P_s(x)+\ldots \tag{90$^{\text{bis}}$}$$

въ которомъ всѣ многочлены $P_s(x)$ (при $s>0$) удовлетворяютъ условію

$$|P_s(x)|<\frac{1}{2^s}.$$

Послѣ этого представимъ всѣ многочлены $P_s(x)$ въ видѣ

$$P_s(x)=\sum_{k=0}^{k=m}A_k^{(s)}x^k(1-x)^{m-k}.$$

Полагая m достаточно большимъ, чтобъ нормальный максимумъ $M_m^{(s)}$ многочлена P_s не превышалъ болѣе, чѣмъ въ 2 раза его обыкновеннаго максимума, получимъ

$$\sum_{k=0}^{k=m}|A_k^{(s)}|x^k(1-x)^{m-k}<\frac{1}{2^{s-1}}.$$

Дѣлая тоже преобразованіе для всѣхъ s, мы, очевидно, преобразуемъ рядъ $f(x)$ въ нормальный рядъ; ч. н. т. д.

Слѣдствіе. *Для всякой непрерывной функціи имѣетъ мѣсто равенство* [1])

$$f(x) = \underset{m=\infty}{\text{пред.}} \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $f(x) = P(x)$ есть многочленъ, то на основаніи равенства (88^{bis}),

$$\left| P(x) - \sum_{k=0}^{k=m} P\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{B}{m}. \tag{91}$$

Если же $f(x)$ есть произвольная функція (90^{bis}), то, полагая

$$P_0 + P_1 + \ldots P_s = P,$$

имѣемъ

$$|f - P| < \frac{1}{2^s} \tag{92}$$

поэтому, примѣняя къ многочлену $P(x)$ неравенство (91) заключаемъ, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{B}{m}.$$

Такимъ образомъ, какъ бы мало ни было число α, выбираемъ s достаточно большимъ, чтобы

$$\frac{1}{2^{s-1}} < \frac{\alpha}{2};$$

послѣ выбора s, многочленъ P и коэффиціентъ B будутъ опредѣлены, и слѣдовательно, выбирая m достаточно большимъ, найдемъ

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \alpha,$$

т. е.

$$f(x) = \underset{m=\infty}{\text{пред.}} \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Ч. н. т. д.

---

[1]) Эта формула выведена мною при помощи теоріи вѣроятностей въ маленькой замѣткѣ «Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités», помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Математ. Общ. Т. XIII nº 1, 1912 г.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

Разложеніе непрерывныхъ функцій въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Глава VI.

О приближеніи, осуществляемомъ посредствомъ разложенія функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.

69. Средняя квадратичная ошибка. Отысканіе многочлена данной степени, наименѣе уклоняющагося отъ нѣкоторой функціи $f(x)$, представляетъ, какъ это видно изъ предшествующихъ главъ, задачу чрезвычайной трудности. Поэтому интересно выяснить, какую выгоду для рѣшенія этой задачи, можно извлечь изъ рѣшенія другой аналогичной, но несравненно болѣе легкой, задачи отысканія многочлена $R_n(x)$ степени n по условію, чтобы *средняя квадратичная ошибка*

$$\int_a^b p(x) . [f(x) - R_n(x)]^2 dx$$

(при данномъ *вѣсѣ* $p(x) \geqq 0$) была бы возможно малой. Полагая, для опредѣленности, $a = -1$, $b = +1$, мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая [1]), когда $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Но

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - R_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi [f(\cos\theta) - R_n(\cos\theta)]^2 d\theta; \quad (93)$$

---

[1]) Обобщеніе результатовъ, которые будутъ получены въ этомъ случаѣ, не представляетъ серьезныхъ трудностей. См. *Haar* „Orthogonale Funktionensysteme“ Mathemat. Annalen B. 69. 1910, и въ Запискахъ Академіи Наукъ, *В. А. Стекловъ* „Sur la théorie de fermeture des systémes de fonctions orthogonales“, 1911.

и, замѣчая (§ 10), что

$$R_n(\cos\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + \ldots + A_n\cos n\theta,$$

находимъ условія необходимыя и достаточныя для минимума δ:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)d\theta \tag{94}$$

и

$$A_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,.\cos p\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)\,.\cos p\theta d\theta.$$

Формулы (94) даютъ ничто иное, какъ хорошо извѣстные коэффиціенты Фурье [1]) разложенія функціи $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ въ тригонометрическій рядъ. Эти же коэффиціенты мы находимъ и для разложенія $f(x)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$f(x) = A_0 + A_1T_1(x) + \ldots + A_nT_n(x) + \ldots; \tag{95}$$

а многочленъ

$$R_n(x) = A_0 + A_1T(x) + \ldots + A_nT_n(x), \tag{95bis}$$

обращающій въ минимумъ среднюю квадратичную ошибку, получается, если въ разложеніи (95) отбросить члены степени выше n.

Въ V главѣ (§ 61) мы уже разсматривали приближенные многочлены $R_n(x)$ и видѣли, что въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ они даютъ асимптотическія выраженія многочленовъ наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Во многихъ случаяхъ, какъ будетъ показано дальше,

$$1 < \frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k, \tag{96}$$

гдѣ k независимая отъ n постоянная, а $I_n[f(x)]$ есть максимумъ разности $|f(x) - R_n(x)|$. Но уже одинъ тотъ фактъ, что существуютъ непрерывныя функціи, которыя не могутъ быть разложены въ сходящійся тригонометрическій рядъ, показываетъ, что неравенство (96) не всегда имѣетъ мѣсто, такъ какъ возможно, что $E_n[f(x)]$ стремится къ нулю, между тѣмъ какъ $I_n[f(x)]$ возрастаетъ безконечно. Изслѣдованіе условій, какимъ должна удовлетворять функція $f(x)$, чтобы неравенство (96) было соблюдено, является такимъ образомъ непосредственнымъ продолженіемъ классической теоріи разложенія функцій въ тригонометрическій рядъ.

---

[1]) Коэффиціенты при синусахъ равны нулю.

70. Нѣкоторыя слѣдствія изъ теоремы Рисса. Прежде чѣмъ перейти къ изученію наименьшаго уклоненія съ новой точки зрѣнія, на которую мы становимся въ этой главѣ, сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о минимумѣ средней квадратичной ошибки, не имѣющія прямого отношенія къ дальнѣйшему. Напомню сначала теорему Фридриха Рисса [1]): *для того, чтобы функція $\varphi(\theta)$ была квадратично интегрируема (т. е. чтобы интегралъ $\int_a^b \varphi^2(\theta)d\theta$, при $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$, существовалъ въ смыслѣ Лебега [2]) необходимо и достаточно, чтобы рядъ $\sum\limits_{p=0}^{p=\infty} A_p^2$ былъ сходящимся, обозначая черезъ A_p коэффиціенты Фурье (94) функціи $\varphi(\theta)$; при этомъ,*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)d\theta = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p^2.$$

Примѣняя теорему Рисса къ функціи

$$-\varphi'(\theta) = f'(\cos\theta)\,.\sin\theta = f'(x)\ \sqrt{1-x^2},$$

у которой коэффиціенты Фурье равны pA_p, находимъ, что условіе необходимое и достаточное для того, чтобы интегралъ

$$\int_a^b [f'(x)]^2(1-x^2)dx$$

существовалъ (въ смыслѣ Лебега), при $-1 \leqq a < b \leqq 1$, заключается въ томъ, чтобы рядъ $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$ былъ сходящимся (коэффиціенты A_p даны формулами (94)), т. е. чтобы сумма

$$\beta_{p_0} = \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$$

стремилась къ нулю съ возрастаніемъ p_0.

Но

$$\delta_{p_0}^2 = \pi \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} A_p^2; \tag{93bis}$$

поэтому

$$(p_0+1)^2\delta_{p_0}^2 < \pi\beta_{p_0} < (p_0+1)^2\delta_{p_0}^2 + \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty}(2p+1)\delta_p^2.$$

---

[1]) *Fr. Riesz* „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen" Mathem. Annalen B. 69.

[2]) Lebesgue „Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives".

Такимъ образомъ, полагая $\delta_p = \frac{\varepsilon_p}{p+1}$, видимъ, что *для существованія интеграла* $\int_a^b [f'(x)]^2(1-x^2)dx$ *необходимо, чтобы* $\varepsilon_p = \delta_p.(p+1)$ *стремилось къ нулю, и достаточно, чтобы рядъ* $\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\varepsilon_p^2}{p+1} = \sum_{p=1}^{p=\infty}(p+1)\delta_p^2$ *былъ сходящимся*. Послѣднее условіе соблюдается, если $\varepsilon_p \leqq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ или $\leqq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}}(\log\log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ и т. д. Аналогичные результаты можно получить и для послѣдующихъ производныхъ; не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что величина минимума средней квадратичной ошибки δ_n^2 такъ же тѣсно связана съ *интегрально-дифференціальными* свойствами функціи *на всемъ промежуткѣ*, какъ наименьшее уклоненіе $E_n[f(x)]$ связано съ *дифференціальными* свойствами функціи въ каждой отдѣльной точкѣ (глава II).

Примѣчаніе. Изъ равенствъ (93) и (93^bis) видно что $\delta_n < E_n.\sqrt{\pi}$; поэтому

$$\sqrt{A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \ldots} < E_n[f(x)] < |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \ldots; \quad (77^{\text{bis}})$$

это неравенство немного точнѣе неравенства (77), если замѣтить, что $A_{n+1} = \lambda_n$.

71. Теорема. *Для всякой непрерывной функціи $f(x)$ имѣетъ мѣсто неравенство (сохраняя обозначенія § 69)*

$$\frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k_1 \log(n+1), \quad (97)$$

гдѣ k_1 независимая отъ n и отъ функціи $f(x)$ постоянная.

Эта теорема вытекаетъ изъ аналогичной теоремы, доказанной Лебегомъ въ цитированной уже ранѣе работѣ „Sur les intégrales singulières“ [1]), отличающейся отъ нашей теоремы тѣмъ, что у него I_n есть максимумъ разности $|f(x) - \sum_{p=0}^{p=n} A_p \cos px + B_p \sin px|$, гдѣ A_p и B_p коэффиціенты Фурье, а E_n наилучшее приближеніе $f(x)$ при помощи тригонометрической суммы n-аго порядка. Такимъ образомъ, считая теорему Лебега для тригонометрическихъ суммъ доказанной, мы получимъ неравенство (97), если, какъ въ § 69, сдѣлаемъ подстановку $x = \cos\theta$.

---

[1]) Annales de Toulouse, t. I (1909 г.). См. также упомянутую выше работу *D. Jackson*. Въ работѣ „Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihe“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 138, L. Fejer производитъ вычисленіе, изъ котораго вытекаетъ, что коэффиціентъ k_1 въ формулѣ (97) имѣетъ предѣломъ $\frac{8}{\pi^2}$, при $n = \infty$.

72. Слѣдствія. 1) Лебегъ выводитъ изъ своей теоремы и изъ того, что наилучшее приближеніе E_n функцій, удовлетворяющихъ условію Дини-Липшица, менѣе, чѣмъ $\varepsilon_n \log(n+1)$, гдѣ $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, что эти функціи разлагаются въ сходящіеся тригонометрическіе ряды. Мы можемъ, слѣдовательно, также утверждать на основаніи неравенствъ (97) и (79), что *всякая функція, удовлетворяющая условію Дини-Липшица, разлагается въ сходящійся рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.* Замѣтимъ кромѣ того, что, вслѣдствіе замѣчанія, заканчивающаго § 63, *функція, удовлетворяющая обобщенному условію Дини-Липшица, разлагается въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, который можно сдѣлать сходящимся простой группировкой членовъ.*

2) Теорема (71) показываетъ намъ, что, если, вообще, порядокъ убыванія E_n неравенъ I_n, тѣмъ не менѣе онъ всегда опредѣляетъ порядокъ E_n, съ точностью до множителя $\log(n+1)$. Укажемъ, напримѣръ, верхнюю и нижнюю границу для $E_{2n}|x|$ въ промежуткѣ $-1, +1$. Для этого, раскладываемъ $|x|$ въ строку тригонометрическихъ многочленовъ. Примѣняя формулы (94), находимъ

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}, \quad A_{2k+1} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta| \cos 2k\theta d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cos 2k\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2k+1)\theta + \cos(2k-1)\theta] d\theta = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Слѣдовательно,

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{T_2}{1.3} - \frac{T_4}{3.5} + \frac{T_6}{5.7} - \ldots\right]; \tag{98}$$

поэтому

$$I_{2n} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right] = \frac{2}{\pi(2n+1)}. \tag{99}$$

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы (71),

$$\frac{k_1}{(2n+1)\log(2n+1)} < E_{2n} < \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

Первая часть этого неравенства [1]), разумѣется, несравненно менѣе удовлетворительна, чѣмъ результаты, найденные нами ранѣе; но вторая

---

[1]) Это неравенство имѣется и въ упомянутой работѣ Джексона, который, независимо отъ меня, получилъ его аналогичнымъ образомъ.

часть неравенства даетъ довольно точную верхнюю границу $E_{2n} < \frac{0,637}{2n}$. Другими словами, приближеніе $|x|$, которое даетъ столь простое разложеніе (98) лишь незначительно хуже наилучшаго приближенія; а именно, припоминая, неравенства (59), имѣемъ (по крайней мѣрѣ, для весьма большихъ значеній n)

$$1,99 < \frac{I_{2n}|x|}{E_{2n}|x|} < 2,36. \tag{100}$$

73. Теорема. *Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $\alpha < 1$, то*

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^\alpha}, \tag{101}$$

гдѣ k независимый отъ n коэффиціентъ: при этомъ, многочлены степени n, осуществляющіе приближеніе $\frac{k}{n^\alpha}$, получаются посредствомъ примѣненія способа суммированія Фейера къ разложенію разсматриваемой функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ. (То же самое mutatis mutandis имѣетъ мѣсто и для тригонометрическихъ суммъ).

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x = \cos\theta$ и обозначая черезъ

$$S_n = A_0 + A_1 T_1(x) + \ldots + A_n T_n(x) = A_0 + A_1 \cos\theta + \ldots + A_n \cos n\theta$$

сумму $(n+1)$ члена разложенія $f(x) = f(\cos\theta) = \varphi(\theta)$, мы получимъ приближенную сумму Фейера $(n-1)$-го порядка

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots s_{n-1}}{n};$$

и, при этомъ, остатокъ R_n равенъ [1])

$$R_n = \sigma_n - \varphi(\theta) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 [\varphi(\theta + 2t) + \varphi(\theta - 2t) - 2\varphi(\theta)dt.$$

По предположенію,

$$|f(x+h) - f(x)| < Nh^\alpha,$$

гдѣ N данное число; а слѣдовательно и

$$|\varphi(\theta + 2t) - \varphi(\theta)| < N.(2t)^\alpha = Mt^\alpha.$$

Поэтому,

---

[1]) *Lebesgue.* Leçons sur les séries trigonométriques (стр. 94).

$$|R_n| < \frac{2M}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 t^\alpha dt <$$

$$< \frac{2M}{n\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t^\alpha dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha dt}{\sin^2 t}\right] < \frac{2M}{\pi n^\alpha}\left[\frac{1}{1+\alpha} + \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\right].$$

Такимъ образомъ, при $\alpha < 1$,

$$|f(x) - \sigma_n| < \frac{k}{n^\alpha},$$

гдѣ k независимый отъ n коэффиціентъ, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Изъ доказательства видно, что, выводъ не нарушится, если даже N не постоянная величина, а возрастаетъ безконечно при $x = \pm 1$. Съ тѣмъ обстоятельствомъ, что одна и таже особенность функціи внутри отрѣзка и на концахъ его не одинаково вліяетъ на приближеніе функціи при помощи многочленовъ, мы уже встрѣчались во второй главѣ. Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи этого вопроса, укажемъ лишь одинъ простой примѣръ, на которомъ отчетливо видна сущность этой разницы: изъ доказанной теоремы вытекаетъ, что $E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$, гдѣ $\alpha < 1$; при этомъ, ясно, что многочленъ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|^\alpha$, не содержитъ нечетныхъ степеней x; поэтому, полагая $x^2 = y$, мы видимъ, что наименьшее уклоненіе $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ на отрѣзкѣ 01 также удовлетворяетъ неравенству $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right) = E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$. Другими словами, условіе Липшица степени α внутри отрѣзка имѣетъ существенно тоже значеніе для наименьшаго уклоненія, что условіе Липшица степени $\frac{\alpha}{2}$ въ концахъ отрѣзка.

74. Результаты Джексона [1]). Нетрудно замѣтить, что остатокъ, получаемый при примѣненіи способа Фейера въ случаѣ, когда $\alpha = 1$, не подчиняется закону, выраженному предшествующей теоремой: въ этомъ случаѣ, можно утверждать только, что

$$R_n < \frac{k \log n}{n}.$$

---

[1]) *D. Jackson*. Uber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen. Этотъ §, разумѣется, не могъ войти въ первоначальную редакцію моего сочиненія, какъ и всѣ ссылки на работу Джексона.

Джексонъ, независимо отъ меня, и при помощи другого метода, получилъ болѣе законченный результатъ: а именно, онъ показалъ, что при $\alpha = 1$,

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n}. \tag{101bis}$$

Кромѣ того, онъ доказалъ еще, что, если $f(x)$ имѣетъ производную p-*аго* порядка, удовлетворяющую условію Липшица степени $\alpha \leqq 1$, то

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^{p+\alpha}}, \tag{102}$$

гдѣ k, какъ всегда, независимая отъ n постоянная.

Слѣдствіе. *Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени* ($\alpha \leqq 1$), *то*

$$I_n[f(x)] < \frac{k_2 \log n}{n^\alpha}. \tag{103}$$

Это вытекаетъ изъ неравенствъ (101) и (101$^{\text{bis}}$), благодаря неравенству (97).

Примѣчаніе. Этотъ результатъ, для тригонометрическихъ суммъ, былъ полученъ непосредственно Лебегомъ [1]), который показалъ также что верхняя граница $I_n[f(x)]$ не можетъ быть понижена, если о функціи $f(x)$ ничего болѣе не извѣстно. Отсюда слѣдуетъ, что и верхняя граница $E_n[f(x)]$, найденная Джексономъ и мной, также не можетъ быть понижена, если взять неопредѣленную функцію, удовлетворяющую данному условію Липшица. Если принять неравенство (102), то изъ него точно также можно получить, что

$$I_n[f(x)] < \frac{k \log n}{n^{p+\alpha}} \tag{103bis}$$

для функцій, имѣющихъ p-*ую* производную, удовлетворяющую условію Липшица степени α.

Но я воспроизведу съ небольшимъ упрощеніемъ свой первоначальный выводъ неравенства (103$^{\text{bis}}$), который представляетъ, быть можетъ, нѣкоторый принципіальный интересъ.

75. Доказательство неравенства (103$^{\text{bis}}$). Замѣтимъ прежде всего, что условіе, что $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ удовлетворяетъ условію Липшица степени α, влечетъ за собой существованіе условія Липшица степени α для $\frac{d^p \varphi(\theta)}{d\theta^p}$.

---

[1]) *Lebesgue.* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. Bullet. de la Société Math. de France. 1910.

Разсмотримъ сперва четныя значенія $p=2\mu$. Пусть

$$\varphi(\theta)=f(\cos\theta)=A_0+A_1\cos\theta+\ldots+A_n\cos n\theta+\ldots;$$

въ такомъ случаѣ,

$$\frac{d^p\varphi(\theta)}{d\theta^p}=\pm\left[A_1\cos\theta+\ldots+n^pA_n\cos n\theta+\ldots\right].$$

Полагая

$$\varrho_n=(n+1)^pA_{n+1}\cos(n+1)\theta+(n+2)^pA_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots,$$

мы заключаемъ изъ неравенства (103), что

$$|\varrho_n|<\frac{k\log n}{n^\alpha}.$$

А потому, на основаніи извѣстной леммы Абеля,

$$|R_n|=|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+A_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots|<\frac{|\varrho_n|}{(n+1)^p}<\frac{k\log n}{n^{p+\alpha}}.$$

Для разсмотрѣнія случая, когда $p=2\mu-1$ нечетное число, выведемъ предварительно слѣдующее неравенство, справедливое для всякаго значенія $s>1$: если

$$|R_n|=|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+A_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots|<\frac{k\log n}{n^s},\qquad(104)$$

то

$$|R'_n|=|(n+1)A_{n+1}\sin(n+1)\theta+(n+2)A_{n+2}\sin(n+2)\theta+\ldots|<\frac{2^{s+1}k.\log n}{(2^{s-1}-1)^2n^{s-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ (104) вытекаетъ, что

$$|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+\ldots+A_{2n}\cos 2n\theta|<\frac{2k\log n}{n^s},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$|(n+1)A_{n+1}\sin(n+1)\theta+\ldots+2nA_{2n}\sin 2n\theta|<\frac{4k\log n}{n^{s-1}}.$$

Слѣдовательно,

$$|R'_n|<\frac{4k}{n^{s-1}}\left[\log n+\frac{\log 2n}{2^{s-1}}+\frac{\log 4n}{4^{s-1}}+\ldots\right]=\frac{4k\log n}{n^{s-1}}\cdot\frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1}+$$

$$+\frac{4k\log 2}{n^{s-1}}\cdot\frac{2^{s-1}}{(2^{s-1}-1)^2}<\frac{2^{s+1}k.\log n}{(2^{s-1}-1)^2n^{s-1}}.\qquad(105)$$

Само собой понятно, что тоже самое неравенство мы получимъ и въ томъ случаѣ, когда R_n состоитъ изъ синусовъ.

Послѣ этого, беремъ функцію

$$\Phi(\theta)=\int_0^\theta \varphi(\theta)d\theta$$

гдѣ, по прежнему, $\varphi(\theta)=f(\cos\theta)$.

Въ такомъ случаѣ, остатокъ R_n тригонометрическаго разложенія функціи $\Phi(\theta)$, имѣющей производную четнаго порядка $p+1=2\mu$, удовлетворяетъ неравенству

$$|R_n|<\frac{k\log n}{n^{p+1+\alpha}},$$

а слѣдовательно, остатокъ $|R_n'|$ въ разложеніи $\varphi(\theta)$, вслѣдствіе (105), будетъ менѣе

$$\frac{2^{p+2}k\log n}{(2^p-1)^2 . n^{p+\alpha}};$$

такимъ образомъ неравенство (103^{bis}) справедливо, для всякаго p.

Слѣдствія. a) Если функція $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, то ея разложеніе въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ равномѣрно сходится, такъ же какъ и ряды, получаемые отъ дифференцированія, какое угодно число разъ, разсматриваемаго разложенія.

b) Если функція $f(x)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; n^p I_n[f(x)]=\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; n^p E_n[f(x)=0,$$

при всякомъ p (теорема 22).

76. Теорема [1]. *Если модуль аналитической функціи $f(x)$ менье M внутри эллипса E, имъющаго фокусами точки -1 $+1$ и полусумму осей равную $\frac{1}{\varrho}$, то*

$$E_n[f(x)]<I_n[f(x)]<\frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho}$$

на отрѣзкѣ $(-1, +1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формуламъ (94),

$$A_p=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta).\cos p\theta d\theta,$$

или, полагая $z=e^{i\theta}$,

---

[1]) См. теорему 29.

$$A_p = \frac{1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) . \frac{z^p+z^{-p}}{z}\, dz ,$$

при чемъ послѣдній интегралъ взятъ по окружности C радіуса равнаго единицѣ. Въ то время, какъ комплексная перемѣнная x описываетъ эллипсъ E, комплексная перемѣнная z описываетъ, либо окружность C_1 радіуса ϱ, либо окружность C_2 радіуса $\frac{1}{\varrho}$, такъ какъ

$$x = \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Но $f(x)$, по предположенію, остается голоморфной внутри эллипса E; поэтому $f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)$ также голоморфна между окружностями C_1 и C_2. Слѣдовательно,

$$\left|\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1}\, dz\right| = \left|\int_{C_1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1}\, dz\right| < 2\pi M\varrho^p$$

и

$$\left|\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) . \frac{dz}{z^{p+1}}\right| = \left|\int_{C_2} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) . \frac{dz}{z^{p+1}}\right| < 2\pi M\varrho^p,$$

откуда

$$|A_p| < 2M\varrho^p.$$

И, наконецъ,

$$I_n[f(x)] < [\,|A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \ldots] < \frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho},$$

ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Въ предшествующей теоремѣ, такъ же какъ и въ условіяхъ теоремъ (22) и (29), наименьшее уклоненіе E_n можетъ быть замѣнено минимумомъ средней квадратичной ошибки δ_n.

77. Различныя слѣдствія и приложенія.

А) *Если функція $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производную порядка k, полное измѣненіе (variation totale) которой ограничено (bornée), то*

$$I_n[f(x)] < \frac{h'}{n^k},$$

гдѣ h' независимая отъ n постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формулѣ (94),

$$A_p = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) . \cos p\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi p^k}\int_0^{2\pi} \frac{d^k f(\cos\theta)}{d\theta^k} \cos\left(p\theta - \frac{k\pi}{2}\right) d\theta,$$

а потому

$$|A_p| < \frac{h}{p^{k+1}},$$

гдѣ h независимый отъ p коэффиціентъ; слѣдовательно,

$$I_n[f(x)] < h\left[\frac{1}{(n+1)^{k+1}} + \frac{1}{(n+2)^{k+1}} + \dots\right] < \frac{h'}{n^k}$$

B) *Если линія $y=f(x)$ имѣетъ одну или нѣсколько точекъ излома, а между точками излома угловой коэффиціентъ касательной удовлетворяетъ какому нибудь условію Липшица, то*

$$\frac{a}{n} < E_n[f(x)] < I_n[f(x)] < \frac{b}{n}, \tag{96bis}$$

гдѣ a и b два независимыхъ отъ n числа.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_0 и x_1 будутъ абсциссы точекъ излома. Въ такомъ случаѣ,

$$f(x) = M|x-x_0| + N|x-x_1| + \varphi(x),$$

гдѣ M и N постоянные коэффиціенты, а $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица на всемъ промежуткѣ. Поэтому

$$E_n[f(x)] < I_n[f(x)] < MI_n|x-x_0| + NI_n|x-x_1| + I_n[\varphi(x)] < \frac{b}{n}.$$

Съ другой стороны, ясно, что наименьшее уклоненіе E_n на всемъ отрѣзкѣ не меньше, чѣмъ наименьшее уклоненіе E'_n на части его, содержащей лишь одну точку излома, слѣдовательно,

$$E_n[f(x)] > E'_n[f(x)] > ME'_n|x-x_0| - E_n[\varphi(x)] > \frac{a}{n}.$$

C) *Если*

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \frac{\lambda_n}{n^\alpha},$$

при чемъ

$$\frac{\lambda_n}{n^\varepsilon} \geq \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)^\varepsilon},$$

гдѣ $\varepsilon < \alpha$, то

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{2^{2+\alpha}}{2^\alpha - 2^\varepsilon}\cdot\frac{\lambda_n}{n^\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя лемму Абеля, замѣчаемъ, что

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}\frac{A_p}{p}\cos p\theta\right| < \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha}}.$$

Въ такомъ случаѣ,

$$\left|\sum_{p=n}^{p=2n-1}\frac{A_p}{p}\cos p\theta\right| < \frac{2\lambda_n}{n^{1+\alpha}},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$\left|\sum_{p=n}^{p=2n-1}A_p\sin p\theta\right| < \frac{4\lambda_n}{n^{\alpha}};$$

откуда

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}A_p\sin p\theta\right| < \frac{4}{n^{\alpha}}\left[\lambda_n+\frac{\lambda_{2n}}{2^{\alpha}}+\frac{\lambda_{4n}}{4^{\alpha}}+\ldots\right] < \frac{4\lambda_n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{1-2^{\varepsilon-\alpha}}=\frac{2^{2+\alpha}}{2^{\alpha}-2^{\varepsilon}}\cdot\frac{\lambda_n}{n^{\alpha}}.$$

Напримѣръ, если $\lambda_n=\log n$, или $\lambda_n=1$, то $\varepsilon=0$, (по крайней мѣрѣ, для весьма большихъ значеній n), такъ что изъ неравенства

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}A_p\cos p\theta\right| < \frac{\log n}{n}$$

вытекаетъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}A_p\sin p\theta\right| < \frac{8\log n}{n};$$

а изъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}A_p\cos p\theta\right| < \frac{1}{n}$$

вытекаетъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}A_p\sin p\theta\right| < \frac{8}{n}.$$

Само собой понятно, что cos и sin могутъ быть взаимно перемѣщены. Этотъ результатъ заслуживаетъ вниманія потому, что, вообще, изъ сходимости ряда cos нельзя вывести сходимости ряда sin, и наоборотъ. Напримѣръ, сумма

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\sin px}{p}=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$$

конечна, а между тѣмъ, не только $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty}\frac{\cos px}{p}$, но $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty}\frac{\cos px}{p\log p}$ возрастаетъ безконечно.

Относительно медленно сходящихся рядовъ, при помощи предыдущаго разсужденія, не трудно показать, что, если [1])

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \varepsilon_n,$$

гдѣ числа ε_n идутъ не возрастая, то

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < 4(\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \ldots);$$

такимъ образомъ, только въ томъ случаѣ изъ сходимости ряды косинусовъ можно вывести сходимость ряда синусовъ, когда рядъ $\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \ldots$ сходится, т. е., напримѣръ если $\varepsilon_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\alpha}}$.

Упражненіе. Показать, что рядъ $\sum\limits_{n=3}^{n=\infty} \frac{(\log\log n)^\alpha}{n} \sin nx$, при $\alpha > 0$, не можетъ быть сходящимся для всѣхъ значеній x.

---

[1]) Для опредѣленности, мы разсматриваемъ все время всѣ значенія θ; но аналогичныя неравенства могутъ быть даны если вмѣсто всѣхъ значеній θ брать въ данномъ неравенствѣ $a \leqq \theta \leqq b$, а въ томъ, которое изъ него вытекаетъ, предполагать $a < a' \leqq \theta \leqq b' < b$.

Глава VII.

О нѣкоторыхъ свойствахъ функцій двухъ перемѣнныхъ.

78. Введеніе. Въ настоящее время еще весьма мало изученъ вопросъ о томъ, какова зависимость между свойствами функціи $f(x, y)$, разсматриваемой, какъ функція двухъ перемѣнныхъ и свойствами той же функціи, разсматриваемой, какъ функція одного только x и одного только y. Нѣкоторые простые примѣры, вродѣ функціи $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$, дали поводъ преувеличить трудность этого вопроса. Дѣйствительно, функція z вещественной перемѣнной x. голоморфна при всякомъ опредѣленномъ значеніи вещественнаго параметра y, и точно также функція z голоморфна относительно y при всякомъ x, а между тѣмъ таже функція z, разсматриваемая, какъ функція x и y одновременно, при $x=y=0$, не только не голоморфна, но не стремится ни къ какому предѣлу.

Пользуясь соотношеніями между приближеніемъ функціи посредствомъ многочленовъ или тригонометрическихъ суммъ и ея дифференціальной природой, можно однако указать рядъ теоремъ, которыя во многихъ случаяхъ позволяютъ свести изслѣдованіе функціи двухъ (или n) перемѣнныхъ къ изслѣдованію двухъ (или n) функцій одной перемѣнной.

79. Теорема. *Пусть*

$$f(x,\ y) = f(\cos u,\ \cos v) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,\,q} \cos pu \cos qv,$$

и ряды

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^k} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} p^k A_{p,\,q} \cos\left(pu + \frac{k\pi}{2}\right) \cos qv,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial v^k} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} q^k A_{p,\,q} \cos pu \cos\left(pv + \frac{k\pi}{2}\right)$$

абсолютно сходятся; въ такомъ случаѣ всѣ частныя производныя порядка $\frac{\partial^k f}{\partial u^l \partial v^{k-l}}$ *конечны и непрерывны, и ряды*

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^l \partial v^{k-l}} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} p^l q^{k-l} A_{pq} \cos\left(pu + \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(qv + \frac{(k-l)\pi}{2}\right)$$

абсолютно сходятся.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\sum_{p=0,\; q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^k \,|\, A_{p,q} \,| < M, \quad \sum_{p=0,\; q=0}^{p=\infty, q=\infty} q^k \,|\, A_{p,q} \,| < M,$$

то

$$\sum_{p=\infty, q=\infty}^{p=\infty, q=\infty} p^l q^{k-l} \,|\, A_{p,q} \,| < 2M,$$

такъ какъ

$$p^l q^{k-l} < p^k + q^k.$$

80. Теорема. *Если періодическая относительно* (u, v) *функція* $\varphi(u, v)$, *имѣетъ вторыя частныя производныя* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ *квадратично интегрируемыя, т. е.*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 du\, dv < M, \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 du dv < M,$$

то она имѣетъ также квадратично интегрируемую частную производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}$, *а именно,*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\, du dv < M.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$A_{p,q} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(u,\; v) \cos pu \cos qv\, du\, dv,$$
$$B_{p,q} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(u,\; v) \cos pu \cos qv\, du dv, \tag{106}$$

и т. д., получаемъ

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 du dv = \pi^2 \sum_{p=\infty, q=\infty}^{p=\infty, q=\infty} p^4 \,[A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \ldots] < M$$

и

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 du dv = \pi^2 \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} q^4 \,[A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \ldots] < M.$$

На основаніи теоремы Рисса, для того, чтобъ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ была квадратично интегрируема, необходимо и достаточно, чтобъ рядъ

$$S = \pi^2 \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} p^2 q^2 [A^2_{p,q} + B^2_{p,q} + \dots]$$

былъ сходящимся, и тогда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 du dv = S.$$

Но

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\, du dv < M.$$

81. Теорема. *Если періодическая функція $\varphi(u, v)$, разсматриваемая, какъ функція u, имѣетъ частную производную $\frac{\partial^l\varphi}{\partial u^l}$, удовлетворяющую опредѣленному условію Липшица степени α, и точно также, разсматриваемая, какъ функція v, имѣетъ производную $\frac{\partial^l\varphi}{\partial v^l}$, удовлетворяющую условію Липшица степени α, то функція $\varphi(u, v)$ имѣетъ всѣ частныя производныя порядка l, и эти послѣднія также удовлетворяютъ условіямъ Липшица какой угодно степени $\alpha_1 < \alpha$ (относительно обѣихъ перемѣнныхъ).*

Пусть

$$\varphi(u, v) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,q} \cos pu \cos qv,$$

гдѣ, для сокращенія письма, мы записываемъ только членъ, составленный изъ косинусовъ.

Припоминая значеніе коэффиціентовъ $A_{p,q}$ (106), находимъ

$$S_n = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=n,\, q=n} A_{p,q} \cos pu \cos qv = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \cdot [\varphi(u+2t,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v+2\theta) + \varphi(u+2t,\ v-2\theta) + \varphi(u-2t, v-2\theta)]\, dt d\theta.$$

Откуда

$$R_n = \varphi(u, v) - S_n = \frac{-1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \Big\{[\varphi(u+2t,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v+2\theta) - 2\varphi(u,\ v+2\theta)] + [\varphi(u+2t,\ v-2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v-2\theta) - 2\varphi(u,\ v-2\theta)] + 2[\varphi(u,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u,\ v-2\theta) - 2\varphi(u,\ v)]\Big\} du dv. \qquad (107)$$

Но

$$\varphi(u,\ v+2\theta)=\sum_{p=0}^{p=\infty}a_p(v+2\theta)\cos pu,$$

$$\varphi(u,\ v-2\theta)=\sum_{p=0}^{p=\infty}a_p(v-2\theta)\cos pu, \qquad \varphi(u,\ v)=\sum_{p=0}^{p=\infty}b_p(u)\cos pv,$$

гдѣ

$$a_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u,\ z)\cos pu\,du, \quad b_p(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u,\ v)\cos pv\,dv;$$

поэтому

$$\varrho_n(u,\ v+2\theta)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty}a_p(v+2\theta)\cos pu=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}[\varphi(u+2t,\ v+2\theta)+$$
$$+\varphi(u-2t,\ v+2\theta)-2\varphi(u,\ v+2\theta)]\,dt,$$

$$\varrho_n(u,\ v-2t)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty}a_p(v-2\theta)\cos pu=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin t}[\varphi(u+2t,\ v-2\theta)+$$
$$+\varphi(u-2t,\ v-2\theta)-2\varphi(u,\ v-2\theta)]\,dt,$$

$$\varrho_n'(u,\ v)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty}b_p(u)\cos pv=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}[\varphi(u,\ v+2\theta)+$$
$$+\varphi(u,\ v-2\theta)-2\varphi(u,\ v)]\,d\theta.$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенства (103^{bis}),

$$|\varrho_n(u,\ v+2\theta)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}},\ |\varrho_n(u,\ v-2\theta)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}},$$

$$|\varrho_n'(u,\ v)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}}.$$

А потому

$$|R_n|<\frac{4k\log n}{\pi n^{l+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt.$$

Послѣдній интегралъ вычисленъ Фейеромъ [1]); но намъ достаточно замѣтить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt<\int_0^{\frac{1}{2n+1}}(2n+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}<1+\frac{\pi}{2}\log(2n+1).$$

---

[1]) См. выноску къ § 71.

Слѣдовательно, (для достаточно большихъ n)

$$|R_n| < \frac{2k \log^2 n}{n^{l+\alpha}};$$

и при всякомъ $\alpha_1 < \alpha$, можно выбрать k_1 такъ, чтобъ

$$|R_n| < \frac{k_1}{n^{l+\alpha_1}(\log n)^2}.$$

Но въ такомъ случаѣ, примѣняя результаты 2-й главы (§§ 15—17), убѣждаемся въ существованіи всѣхъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ и въ томъ, что онѣ удовлетворяютъ условію Липшица степени α_1. Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Въ частности, если функція $\varphi(u, v)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени α по отношенію къ каждой перемѣнной въ отдѣльности, то она удовлетворяетъ также условію Липшица степени α_1 относительно обѣихъ перемѣнныхъ.

82. Слѣдствія. A. *Если функція $f(x, y)$ (не періодическая), разсматриваемая, какъ функція одного только x и одного только y, имѣетъ внутри нѣкотораго контура C производную порядка l, удовлетворяющую условію Липшица степени α, то функція $f(x, y)$ имѣетъ всѣ частныя производныя порядка l, и эти послѣднія, во всякой области S внутри контура C, удовлетворяютъ условіямъ Липшица любой степени $\alpha_1 < \alpha$.*

Въ самомъ дѣлѣ, всю область S можно помѣстить внутри нѣсколькихъ квадратовъ C_1, стороны которыхъ не выходятъ изъ контура C. Для опредѣленности, положимъ, что прямыя, на которыхъ расположены стороны квадрата C_1, имѣютъ уравненіями: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Въ такомъ случаѣ, полагая $x = \cos u$, $y = \cos v$,

$$f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \varphi(u, v)$$

есть періодическая функція u, v, которая удовлетворяетъ условіямъ только что доказанной теоремы. А потому частныя производныя $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условіямъ Липшица степени α_1.

Но

$$\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}} = \sum_{h+k \leq l} A_{h,k} \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial u^h \partial y^k},$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $A_{h,k}$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи x, y, которыя голоморфны внутри квадрата C_1, (на сторонахъ квадрата онѣ дѣлаются безконечными). Слѣдовательно, внутри S всѣ частныя производныя $\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица степени α_1.

B. *Если функція $f(x, y)$ внутри контура S, не имѣющаго острыхъ угловъ* [1]) *разсматриваемая, какъ функція одного только x и одного только y, имѣетъ ограниченныя производныя каждаго порядка, то она имѣетъ также внутри области S ограниченныя частныя производныя любого порядка.*

Изъ предыдущаго слѣдствія вытекаетъ непосредственно существованіе и ограниченность всѣхъ производныхъ внутри всякой области S_1, расположенной внутри S. Чтобъ показать, что производныя ограничены во всякой точкѣ M контура S, строимъ квадратъ C_1, не выходящій изъ S и имѣющій одну изъ вершинъ въ точкѣ M. Для опредѣленности, можно предположить снова, что квадратъ C_1 составленъ прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Разлагая функцію $f(x, y)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ внутри C_1, и отбрасывая члены степени выше n относительно x или относительно y находимъ, на основаніи формулъ (103^{bis}) и (107) что, для достаточно большихъ значеній n, ошибка

$$|R_n| < \frac{1}{n^p},$$

каково бы ни было число p. А потому наше утвержденіе есть прямое слѣдствіе изъ теоремы (22).

83. Теорема. *Пусть $f(x, y)$ будетъ нѣкоторая функція двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ (x, y), данная внутри прямоугольника C_1, образованнаго прямыми $x = \pm h$, $y = \pm k$. Если, при всякомъ вещественномъ $x_0 (-h \leqq x_0 \leqq h)$, функція $f(x_0, y)$, голоморфна относительно y, и $|f(x_0, y)| < M$, когда комплексная перемѣнная y находится внутри эллипса E, имѣющаго фокусами $(-k, +k)$ и полусумму осей $\frac{k}{\varrho}$; и, при всякомъ вещественномъ y_0 $(-k \leqq y_0 \leqq k)$, функція $f(x, y_0)$ голоморфна относительно x, и $|f(x, y_0)| < M$, когда комплексная перемѣнная x находится внутри эллипса E_1, имѣющаго фокусами $(-h, +h)$*

[1]) Изъ доказательства будетъ видно, что это условіе вводится для того, чтобъ внутри S можно было помѣстить квадратъ, имѣющій вершину въ любой точкѣ контура S; но, замѣняя прямоугольныя координаты косоугольными, можно квадратъ замѣнить ромбомъ; такимъ образомъ существенно только, чтобъ контуръ S не имѣлъ точекъ возврата.

и полусумму осей $\dfrac{h}{\varrho_1}$: *то функція двухъ перемѣнныхъ* $f(x, y)$ *голоморфна, и* $|f(x, y)| < \dfrac{4M}{(1-\lambda)^2}$, $(\lambda < 1)$, *въ то время какъ комплексная перемѣнная* y *находится внутри эллипса* E' *гомофокальнаго съ* E *и имѣющаго полусуммой осей* $\dfrac{k}{R}$, *а комплексная перемѣнная* x *находится внутри эллипса* E'_1 *гомофокальнаго съ* E_1 *и имѣющаго полусумму осей* $\dfrac{h}{R_1}$, *при чемъ*

$$\frac{\log \lambda R_1}{\log \varrho_1} + \frac{\log \lambda R}{\log \varrho} = 1 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x = h\cos u$, $y = k\cos v$, и раскладывая функцію

$$f(x, y) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,q} T_p\left(\frac{x}{h}\right) T_q\left(\frac{y}{k}\right)$$

въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, мы выводимъ изъ формулъ (106), при помощи разсужденій § 76, что

$$|A_{p,q}| < 4M\varrho_1{}^p, \quad |A_{p,q}| < 4M\varrho^q.$$

А потому, на основаніи неравенства (9), заключаемъ, что, если y находится внутри эллипса E', а x находится внутри эллипса E'_1, то

$$|f(x, y)| < \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} \frac{4M\varrho_1{}^{\frac{ap}{a+b}} \varrho^{\frac{bq}{a+b}}}{R_1^p R^q},$$

каковы бы ни были положительныя числа a и b.

Полагая

$$\frac{\varrho_1{}^{\frac{a}{a+b}}}{R_1} = \frac{\varrho^{\frac{b}{a+b}}}{R} = \lambda ,$$

получимъ

$$|f(x, y)| < 4M \sum_{p=0\ q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} \lambda^p \lambda^q = \frac{4M}{(1-\lambda)^2};$$

при этомъ, очевидно,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\log \lambda R_1}{\log \varrho_1}, \quad \frac{b}{a+b} = \frac{\log \lambda R}{\log \varrho},$$

откуда

$$\frac{\log \lambda R_1}{\log \varrho_1} + \frac{\log \lambda R}{\log \varrho} = 1 . \qquad (108)$$

Слѣдствіе. *Если* $\varrho = \varrho_1$ *то*

$$\lambda^2 = \frac{\varrho}{RR_1}, \tag{108^{bis}}$$

это вытекаетъ изъ формулы (108), въ которой полагаемъ $\varrho = \varrho_1$.

84. Примѣненіе къ уравненіямъ съ частными производными. Результаты предшествующихъ §§ находятся въ тѣсной связи съ теоріей уравненій съ частными производными, и было бы интересно вывести изъ нихъ систематически свойства уравненій эллиптическаго типа. Я ограничусь только двумя замѣчаніями.

1) *Уравненіе эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \qquad (AC - B^2 > 0)$$

гдѣ A, B, C *какія угодно функціи* x, y, z, p, q *не имѣетъ иныхъ рѣшеній періодическихъ относительно* x, y, *обладающихъ конечными производными первыхъ двухъ порядковъ* [1]), *кромѣ постоянной величины.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы (80) мы знаемъ, что

$$\int\!\!\int s^2 dxdy = \int\!\!\int rtdxdy = -\int\!\!\int \frac{t\,(Ct + 2Bs)}{A}\,dxdy,$$

откуда

$$\int\!\!\int \frac{As^2 + 2Bst + Ct^2}{A}\,dxdy = 0,$$

а потому

$$t = s = r = 0;$$

слѣдовательно, z есть постоянная величина.

2) *Если производныя функціи* z, *до порядка* k *включительно, удовлетворяютъ въ нѣкоторой области* S *какому нибудь условію Липшица, и кромѣ того, функція* z *удовлетворяетъ двумъ уравненіямъ*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}} &= f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \\ \frac{\partial^{k+1} z}{\partial y^{k+1}} &= \varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \end{aligned} \tag{109}$$

гдѣ f *и* φ *имѣютъ конечныя производныя всѣхъ порядковъ при конечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, то функція* z *имѣетъ также конечныя производныя всѣхъ порядковъ во всякой области* S_1 *внутри* S.

---

[1]) Это вытекаетъ также изъ обобщенной теоремы Ліувилля, указанной мной въ Comptes Rendus, 10-го октября 1910 г.

Дѣйствительно, изъ уравненій (109) выводимъ непосредственно, что $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^{k+1}}$ и $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial y^{k+1}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица. Поэтому, на основаніи слѣдствія (A) § 82, тѣмъ же свойствомъ обладаютъ всѣ производныя порядка $(k+1)$ во всякой области S_1' внутри S. Дифференцируя первое уравненіе относительно x, а второе относительно y, мы можемъ тоже разсужденіе примѣнить къ производнымъ $(k+2)$-го порядка; послѣдовательное дифференцированіе, оказывающееся возможнымъ, приводитъ такимъ образомъ къ доказательству высказаннаго утвержденія.

Таблица значеній функцій:

$$F(v) = 2v\left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \dots\right] \quad \text{(съ точностью до 0,00055)}$$

и

$$F'(v) = \frac{2}{(2v+1)^2} - \frac{6}{(2v+3)^2} + \frac{10}{(2v+5)^2} - \dots \quad \text{(съ точностью до 0,001).}$$

v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$
0	0,000	0,45	0,332	1,2	0,445	2,1	0,477
0,05	0,070	0,5	0,347	1,3	0,451	2,2	0,478
0,1	0,127	0,55	0,360	1,4	0,456	2,3	0,480
0,15	0,173	0,6	0,371	1,5	0,460	2,4	0,481
0,2	0,212	0,7	0,391	1,6	0,464	2,5	0,483
0,25	0,244	0,8	0,406	1,7	0,467	3	0,488
0,3	0,271	0,9	0,419	1,8	0,470	4	0,493
0,35	0,294	1	0,429	1,9	0,473	5	0,495
0,4	0,314	1,1	0,438	2	0,475	6	0,497

v	$F'(v)$	v	$F'(v)$
0	1,571	0,46	0,314
0,3	0,502	0,48	0,297
0,32	0,471	0,5	0,282
0,34	0,443	0,52	0,268
0,36	0,417	0,54	0,254
0,38	0,393	0,56	0,241
0,4	0,371	0,58	0,230
0,42	0,350	0,6	0,219
0,44	0,331	1	0,093

ПОПРАВКА.

Доказательство неравенства (54) на стр. 126-й, начиная отъ словъ «Полученный результатъ можно еще улучшить» (стр. 125), должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Сохраняя значеніе $B = F\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}34657\ldots$, и полагая $a = 0{,}047$, замѣчаемъ, что функція $\Phi(v)$, при измѣненіи v отъ 0 до 0,42, возрастаетъ. Дѣйствительно, функція $\Phi(v)$ не можетъ имѣть больше одного максимума въ промежуткѣ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, такъ какъ абсолютное значеніе разности $|x| - Q_2(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ $\left(\frac{\pi}{4n}, 1\right)$ не менѣе n максимумовъ; поэтому достаточно замѣтить, что, при $v = 0{,}42$,

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)} = \frac{F'(v) + \dfrac{2av}{\left(\frac{1}{4} - v^2\right)^2}}{F(v) - B + \dfrac{a}{\frac{1}{4} - v^2}} - \pi tg \pi v > \frac{7{,}637}{0{,}615} - \pi tg 75^0 36' > 0{,}18 > 0.$$

Но, $F(v) < B$, при $v < \frac{1}{2}$; слѣдовательно, при $v < \frac{1}{2}$,

$$\Phi(v) < \frac{a\cos\pi v}{\frac{1}{4} - v^2} < \frac{a\cos\frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4} - 0{,}1764} < 3{,}38a = 3{,}38 . 0{,}047 < 0{,}16.$$

А потому

$$E_{2n} < \frac{0{,}32}{2n}. \tag{54}$$

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Вмѣсто:*
50	3 снизу	трехъ	двухъ
53	9 сверху	$P_n(x)\|$	$\|P_n(x)\|$
64	послѣднія четыре строки напечатаны курсивомъ вмѣсто обыкновеннаго шрифта		
76	7 снизу	45	77
77	1	Legons	Leçons
79	9	$<$	$>$
—	4	функція	функціи
83	7 сверху	заказана	доказана
93	20	F'_{x^2}	F''_{x^2}
120	4	$z^{v+\frac{3}{4}}$	$z^{v+\frac{3}{2}}$
130	2	$i\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right)$	$\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right)$
—	3 снизу	4,537	4,637
—	2	неравенства	неравенства
132	2	$I(x)$	$T(x)$
142	14	$I(x)$	$T(x)$
147	24	60	59bis
148	4—5	или или	или
151	17	a^2_{l+n}	a_{2l+n}
152	22	$\lambda_{n_{=}}$	$\lambda_n =$
153	13	62	63
154	12	многочленами $f_{n,p}(x)$ степени	многочленами степени
—	13	многочленъ степени	многочленъ $f_{n,p}(x)$ степени
158	12	$f-P\|$	$\|f-P\|$