
JFM 52.0256.02

Bernstein, S. (Bernstein, Sergej Natanovic)

Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. (French)

X + 208 p. Paris, Gauthier-Villars. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions) (1926).

Das Werk gibt in systematischem Aufbau die von *Tschebyscheff* begründete Theorie der Wachstumseigenschaften der reellen Funktionen. Das erste Kapitel behandelt Extremaleigenschaften von Polynomen in einem endlichen reellen Gebiet, Grundlegend ist der Begriff der *Tschebyscheff*schen Funktionen: Die Polynome $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ bilden ein solches System, wenn

$$F_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_l\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = 0 \qquad (a_0, \dots, a_n \neq 0, 0, \dots, 0)$$

in dem vorliegenden Gebiet höchstens n Wurzeln zuläßt. Es wird nun die Annäherung beliebiger beschränkter Funktionen durch Ausdrücke wie das obige $F_n(x)$ untersucht. Verf. erhält eine große Zahl von Einzelergebnissen über Minimalfunktionen gewisser Funktionsklassen, z. B. aller Polynome mit teilweise vorgegebenen Nullstellen usw. Die Behandlung der Minimalfunktionen unter allen Funktionen $P(x)f(x)$, wo $P(x)$ ein Polynom, $f(x)$ eine beliebige Funktion, zeigt bereits die Anwendbarkeit der Methode auf transzendente Probleme. Den Schluß des Kapitels bilden Beziehungen zwischen dem Wachstum einer Funktion und ihren Ableitungen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Verlaufe reeller Funktionen auf der ganzen reellen Achse. Zunächst werden einige Ausdrücke der Gestalt $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x), Q(x)$ Polynome) betrachtet. Weiterhin untersucht Verf. zum Studium einer Funktion $f(x)$ den Ausdruck

$$E_{\varphi(x)}[f(x)] = \operatorname{Min}\left|\frac{f(x) - P(x)}{\varphi(x)}\right| \qquad (x \text{ beliebig reell}).$$

Darin ist $P(x)$ ein beliebiges Polynom und $\varphi(x)$ eine willkürliche Funktion. Man umgeht so die Schwierigkeit, die sich daraus ergibt, daß Polynomfolgen auf der ganzen Achse nicht gleichmäßig konvergieren. Ist $\varphi(x)$ vom Geschlecht $p > 0$, so ist, vorausgesetzt, daß $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, stets

$$E_{\varphi(x)}[f(x)] = 0.$$

Im folgenden werden Funktionen durch rationale Funktionen approximiert. Hierüber gelten u. a. die Sätze: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine reelle analytische (gewissen einschränkenden Bedingungen unterworfene) Funktion durch eine gleichmäßig konvergente Reihe rationaler Brüche mit gegebenen Polen $\alpha_k \pm i\beta_k$ dargestellt werden kann, ist die Divergenz von $\sum \dfrac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$. – Ferner: Hat $f(x)$ die Eigenschaft, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\left|f(x) - \dfrac{P(x)}{Q(x)}\right| < \varepsilon$ auf der ganzen reellen Achse gibt, und gilt für die Nullstellen $\alpha_k \pm i\beta_k$ der $Q(x)$, daß $\dfrac{|\beta_k|}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ beschränkt ist, dann ist $f(x)$

meromorph und hat keine andern Pole als die $\alpha_k \pm i\beta_k$. Weitere Sätze betreffen ganze Funktionen im Reellen, besonders solche vom Geschlecht 0 oder 1. Manche Sätze zeigen gewisse Analogien zu denen der komplexen Funktionentheorie. Z. B. sei $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $f(x)$ nicht konstant. Ist $\lim n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so kann $f(x)$ auf der reellen Achse nicht beschränkt sein. Ist $\overline{\lim}\, n \sqrt[n]{|a_n|} = L$, so ist $|f'(x)| \leqq$ const. L (x beliebig reell).

Ist
$$\overline{\lim}\, n^{\frac{1}{\varrho}} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad (\varrho > 1),$$
so gilt
$$|f'(x)| < |x|^{\varrho-1} \varrho^{\frac{\varrho}{2}} (\rho - 1)^{-\frac{\varrho-1}{2}} (L+\varepsilon)^{\varrho} \text{ const} \qquad (\varepsilon \to 0 \text{ mit } |x| \to \infty).$$
Interessant ist auch der Satz, daß eine auf der reellen Achse gleichmäßig konvergente Folge ganzer Funktionen gegen eine ganze Grenzfunktion strebt.
Das dritte Kapitel ist dem Studium der Approximation von Funktionen mit Singularitäten gewidmet und zerfällt in zahlreiche Einzelbetrachtungen. – Im Anhang entwirft Verf. eine Funktionentheorie, in der die analytischen Funktionen durch Approximationseigenschaften definiert sind. In einer zweiten Note wird bewiesen: Ist $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} x^{2i}$ vom Geschlechte Null, so ist $\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt[2i]{c_{2i}}$ konvergent. (IV 4.)
Besprechungen: G. Bouligand, Revue scientifique 64, 158; F. Simonart, Revue des questions scient. (4) 9, 520-522; G. Juvet, Rev. générale des sc. 37, 615; A. Buhl, Enseignement 25, 141-142; Mathesis 40, 17-18; G.Vivanti, Bollettino di Mat. (2) 5, LXXVIII-LXXIX; E. B., Periodico (4) 6, 289; C. N. Moore, Bulletin A. M. S. 33 (1927), 369-370; Fr. Lange-Nielsen, Norsk mat. Tidsskrift 8, 18.

Hahn, Wolfgang; Studienassessor Dr. (Berlin)